I Problemi del Giornalino

una rubrica a cura di **Davide Lombardo**

Indice

1 Divertissement **2**
1 Il campionato di biliardino . . . 2
2 I quadrati sono meglio . . . 2
3 La cifra 1 basta e avanza! . . . 2
4 Un'uguaglianza di angoli . . . 2
5 Cammini nel piano . . . 2
6 Monete alla cieca . . . 2
7 Un po' di geometria . . . 3
8 Una curiosa coincidenza . . . 3
9 Divisibilità . . . 3
10 Ci sarà un primo? . . . 3
11 Pianificazione stradale . . . 3
12 Una sequenza esplosiva . . . 3
13 Excentri . . . 3
14 Vladimir e Arnold . . . 3
15 Un esagono speciale . . . 4
16 16 cifre e un quadrato . . . 4
17 Se 100 cerchi non bastano, prova con 400 . . . 4
18 Dadi . . . 4
19 Due quadrati . . . 4
20 Ancora quadrati . . . 5
21 Polinomi di polinomi di polinomi... . . . 5
22 Interi consecutivi . . . 5
23 Un gioco da bambini . . . 5
24 Una lunga lista di numeri . . . 5
25 Somma infinita . . . 5
26 Cerchio inscritto . . . 6
27 Una trasmissione radiofonica . . . 6
28 Un'equazione, ma due incognite . . . 6
29 Quadrati, quadrati, quadrati... . . . 6

2 Qualche apertura verso la matematica non elementare **7**
1 Il teorema di Liouville discreto . . . 7
2 Il problema del ballottaggio . . . 7
3 La lotteria del sultano . . . 8
4 Una curiosa proprietà aritmetica . . . 9
5 Origami . . . 10
6 Il giardino di Minkowski . . . 10
7 Le funzioni binomiali . . . 11
8 Funzioni simmetriche . . . 12

3 Soluzioni – Divertissement 14
1 Il campionato di biliardino 14
2 I quadrati sono meglio 14
3 La cifra 1 basta e avanza! 14
4 Un'uguaglianza di angoli 15
5 Cammini nel piano 16
6 Monete alla cieca 17
7 Un po' di geometria 17
8 Una curiosa coincidenza 18
9 Divisibilità 18
10 Ci sarà un primo? 19
11 Pianificazione stradale 19
12 Una sequenza esplosiva 19
13 Excentri 20
14 Vladimir e Arnold 20
15 Un esagono speciale 21
16 16 cifre e un quadrato 21
17 Se 100 cerchi non bastano, prova con 400 22
18 Dadi 23
19 Due quadrati 23
20 Ancora quadrati 23
21 Polinomi di polinomi di polinomi... 24
22 Interi consecutivi 24
23 Una lunga lista di numeri 24
24 Un gioco da bambini 25
25 Somma infinita 26

4 Soluzioni – Qualche apertura verso la matematica non elementare 27
1 Il teorema di Liouville discreto 27
2 Il problema del ballottaggio 27
3 La lotteria del sultano 29
4 Una curiosa proprietà aritmetica 30
5 Origami 31
6 Il giardino di Minkowski 34
7 Le funzioni binomiali 35

1 Divertissement

1 Il campionato di biliardino

Nel campionato provinciale di biliardino di Pisa ogni squadra ha vinto almeno cinque partite. Dimostrare che c'è una squadra che ha perso almeno cinque partite.

(Le regole del campionato prevedono che ognuna delle partite possa terminare con una vittoria di una delle due squadre oppure con un pareggio.)

2 I quadrati sono meglio

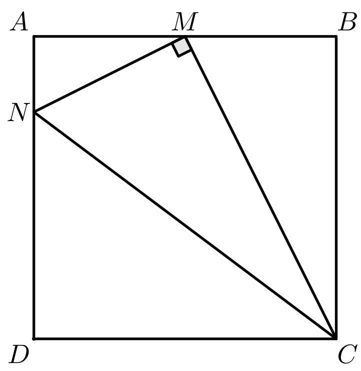
Dimostrare che per ogni scelta di 3 numeri reali a, b, c si ha $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

3 La cifra 1 basta e avanza!

Sia n un intero positivo dispari la cui espressione decimale non termina per 5. Dimostrare che c'è un multiplo di n che in base dieci si scrive utilizzando solo la cifra 1.

4 Un'uguaglianza di angoli

Sia $ABCD$ un quadrato, chiamiamo M il punto medio di AB e N un punto sul lato AD in modo che $\widehat{NMC}$ sia retto (come in figura). Dimostrare che $\widehat{BCM} = \widehat{MCN}$.



5 Cammini nel piano

Una formica parte dall'origine del piano cartesiano e ogni secondo si muove di 1mm a destra o di 1mm verso l'alto. Quanti percorsi diversi la portano, dopo $d + a$ secondi, a trovarsi nel punto di coordinate (d, a)?

6 Monete alla cieca

Alessandra partecipa ad un gioco a premi: viene portata bendata di fronte ad un tavolo, sul quale – le viene detto – ci sono 100 monete, di cui 80 mostrano "testa" e le altre 20 "croce". Le viene chiesto di manipolare le monete come vuole (ma naturalmente senza togliersi la benda!) e, alla fine delle sue operazioni, separare le monete in due gruppi in modo tale che il numero di "teste" in un gruppo sia uguale al numero di "teste" nell'altro. Ce la farà? Sapreste aiutarla?

7 Un po' di geometria

Sia ABC un triangolo con $\widehat{BAC} > \widehat{ACB}$ e sia D il punto di BC tale che $\widehat{BAD} = \widehat{ACB}$. Gli assi di AD e AC si intersecano nel punto E. Provare che l'angolo $\widehat{BAE}$ è retto.

8 Una curiosa coincidenza

1. Si può osservare che $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 25 = 5^2$ e $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 121 = 11^2$. Si tratta di un fenomeno isolato o queste uguaglianze fanno parte di uno schema generale?
2. Trovare tutti gli interi positivi n tali che $n(n+1)(n+2)(n+3)$ sia un quadrato perfetto (ovvero sia il quadrato di un intero).

9 Divisibilità

Sia n un intero positivo. Consideriamo i numeri fra 1 e $2n$: dimostrare che, comunque si scelgano $n+1$ di questi $2n$ interi, se ne sono presi due che non hanno divisori in comune (due interi a e b *non hanno divisori in comune* se l'unico intero positivo che divide sia a che b è 1).

Più difficile: dimostrare anche che comunque si prendano $n+1$ interi nell'insieme $\{1, \dots, 2n\}$ se ne sono scelti due tali che uno divide l'altro.

10 Ci sarà un primo?

Sia $n = 2019!$, ovvero il prodotto dei numeri interi positivi fra 1 e 2019. Consideriamo i 2018 interi compresi fra $n+2$ e $n+2019$: è vero o no che uno di questi 2018 numeri è primo?

11 Pianificazione stradale

Nello stato di Francuvia ci sono 2020 città, ognuna delle quali è collegata con una strada diretta ad almeno 1010 altre città. Dimostrare che per ogni coppia di città, chiamiamole A e B, o sono collegate direttamente da una strada, oppure esiste una terza città, diciamo C, che è collegata ad entrambe (in altri termini, è possibile raggiungere ogni città da ogni altra città passando per al massimo una terza città).

12 Una sequenza esplosiva

Consideriamo la sequenza di interi positivi il cui primo termine è $a_0 = 3$ e in cui l'$(n+1)$-esimo termine a_{n+1} è dato da $2a_n^2 - 1$ (la sequenza inizia quindi $a_0 = 3, a_1 = 17, a_2 = 577, a_3 = 665857, \dots$). Trovare una "formula chiusa" per a_n (cioè una una espressione per a_n che non coinvolga i termini intermedi $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$).

13 Excentri

Sia ABC un triangolo e sia Γ la sua circonferenza circoscritta; chiamiamo M il punto medio dell'arco di Γ di estremi B, C che non contiene il punto A. Indichiamo con I l'incentro di ABC e con I_a l'excentro opposto al vertice A (ovvero il punto d'incontro della bisettrice dell'angolo interno in A e degli angoli tra BC e i prolungamenti di AB e AC dalla parte di B e C rispettivamente). Dimostrare che M è il punto medio di II_a.

14 Vladimir e Arnold

Vladimir e Arnold partono contemporaneamente, al sorgere del sole, dalle loro rispettive abitazioni, poste nei punti A e B. Entrambi camminano a velocità costante (ma diversa per i due protagonisti) per tutto il giorno, lungo la medesima strada, l'uno da A a B, e l'altro da B ad A. A mezzogiorno in punto si incrociano, si salutano, e continuano per la loro strada senza mai fermarsi né cambiare velocità. Vladimir arriva a destinazione, ovvero al punto B, alle 4 di pomeriggio, mentre Arnold, più lento, raggiunge A alle 9 di sera. A che ora è sorto il sole?

Nota. Vuole la tradizione che il grande matematico Vladimir Igorevič Arnol'd abbia risolto questo problema all'età di 12 anni, e ne sia rimasto talmente impressionato da citarlo spesso come uno dei suoi problemi preferiti. Arnol'd impiegò un'intera giornata a risolverlo, quindi non demoralizzatevi se impiegate qualche tempo!

15 Un esagono speciale

Esiste un esagono con tutti gli angoli uguali e lati di lunghezze 1, 2, 3, 4, 5, 6 (non necessariamente in quest'ordine)?

16 16 cifre e un quadrato

Sia n un numero intero positivo di almeno 16 cifre (in base 10). Dimostrare che possiamo scegliere un insieme di una o più cifre consecutive il cui prodotto è un quadrato perfetto (ovvero il quadrato di un numero intero).

17 Se 100 cerchi non bastano, prova con 400

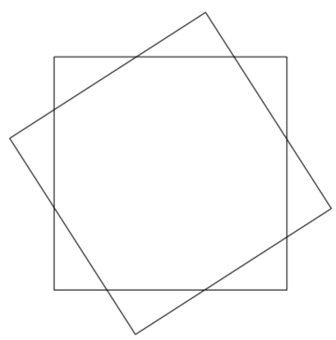
Un rettangolo R nel piano contiene 100 cerchi di raggio 1, a due a due disgiunti, con la proprietà che non è possibile disegnare un ulteriore cerchio con centro contenuto nel rettangolo e disgiunto da quelli già presenti. Dimostrare che è possibile disegnare 100 cerchi di raggio 2, non necessariamente disgiunti, che coprano completamente la superficie del rettangolo. Dimostrare anche che è possibile ricoprire il rettangolo con 400 cerchi di raggio 1 (non disgiunti).

18 Dadi

Lanciamo 100 normali dadi a 6 facce (equilibrati) e sommiamo i risultati. Qual è la probabilità che la somma sia pari?

19 Due quadrati

Consideriamo due quadrati identici, entrambi di lato 1 e con il medesimo centro, come ad esempio quelli in figura.



Mostrare che (qualunque sia la posizione relativa di un quadrato rispetto all'altro) l'area dell'intersezione è strettamente maggiore di $\frac{3}{4}$.

20 Ancora quadrati

Ricordiamo che un numero intero si dice *quadrato perfetto* se la sua radice quadrata è a sua volta intera. Fissiamo una sequenza finita di cifre (per esempio 1793). Dimostrare che esiste sempre un quadrato perfetto la cui espressione decimale inizia con la sequenza di cifre assegnata (per esempio, $1793099025 = 42345^2$).

21 Polinomi di polinomi di polinomi...

Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti interi.

1. Siano a, b interi distinti. Dimostrare che $b - a$ divide $P(b) - P(a)$.
2. ($\star$) Sia t un intero tale che $P(P(P(P(\ldots P(t)\ldots)))) = t$ (il numero di applicazioni del polinomio non è noto). Dimostrare che allora $P(P(t)) = t$.

22 Interi consecutivi

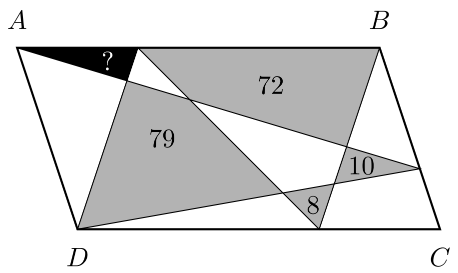
Trovare gli interi positivi n per cui vale la seguente proprietà: la somma di n interi positivi consecutivi è sempre divisibile per n.

Nota. Può essere utile ricordare che la somma dei primi n interi positivi è $\frac{n(n+1)}{2}$.

23 Un gioco da bambini

Secondo una storia ripresa da diversi siti internet, questo problema è stato proposto in Cina per identificare studenti delle elementari particolarmente portati per la matematica. Indipendentemente dall'origine del problema, sapete calcolare l'area della regione nera, sapendo che $ABCD$ è un parallelogramma e che le aree delle regioni grigie sono quelle indicate?

Nota. il disegno non è in scala.



24 Una lunga lista di numeri

Permutando in tutti i modi possibili le cifre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ si possono ottenere $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ numeri diversi. Elenchiamoli tutti in ordine crescente: quale numero occupa la posizione 2021 in questa lista?

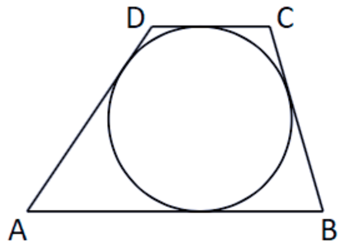
25 Somma infinita

Consideriamo la successione $a_n = \dfrac{n}{2^n}$ e la successione $b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Quando n diventa molto grande, b_n si avvicina arbitrariamente ad un certo valore, senza mai superarlo. Qual è questo valore?

(Per chi conosce questo linguaggio: qual è la somma della serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{2^n}$?)

26 Cerchio inscritto

Un cerchio di raggio 12 tocca tutti i quattro lati di un quadrilatero $ABCD$ in cui il lato AB è parallelo al lato CD. Sapendo che $BC = 25$ e l'area di $ABCD$ è 648, determinare la lunghezza del lato DA.



27 Una trasmissione radiofonica

Nell'ultima parte della fortunata emissione serale *Radio(a)Matrice* i conduttori Alberto e Barbara rispondono alle molte telefonate del pubblico. All'insaputa degli ascoltatori, Alberto e Barbara hanno fatto una scommessa: ogni giorno essi annotano, per ogni chiamata, se l'interlocutore abbia più di 40 anni (X) o meno (Y). Alla fine della serata, se nella lista delle chiamate la combinazione XX compare *prima* della combinazione YX vince Alberto; se viceversa YX compare *prima* di XX vince Barbara (se nessuna delle due combinazioni è realizzata, per quella sera nessuno dei due vince). Quindi, ad esempio, se una sera le telefonate registrate sono state **XX**XYXYYYXYYX vince Alberto, e se un'altra sera le telefonate sono YY**YX**YXXYXXYXY vince Barbara. Dopo che questa scommessa si è protratta per un anno, Alberto osserva che Barbara ha vinto circa il triplo delle volte rispetto a lui! Tenuto conto che il 50% delle telefonate proviene da ascoltatori con più di 40 anni e il 50% proviene da ascoltatori con meno di 40 anni (e quindi le sequenze XX e YX sono ugualmente probabili), sapreste spiegare a cosa sia dovuta la notevole differenza nel numero di vittorie dei due conduttori?

28 Un'equazione, ma due incognite

Sapendo che x e y sono numeri reali tali che

$$(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$$

si calcoli il valore di $x + y$.

29 Quadrati, quadrati, quadrati...

Trovare tutte le coppie (x, y) di interi non negativi tali che

$$x^2 + y^2 = (xy - 7)^2.$$

2 Qualche apertura verso la matematica non elementare

1 Il teorema di Liouville discreto

Sul piano è disegnata una scacchiera infinita, in ogni casella della quale è scritto un numero intero positivo. Questi numeri hanno una particolarità: il valore scritto in una casella della scacchiera è uguale alla media dei valori scritti nelle 4 caselle adiacenti. Dimostrare che i numeri scritti sul piano sono tutti uguali.

Commento. Funzioni di questo tipo sono dette *armoniche*; esiste una versione del teorema di Liouville anche per funzioni armoniche continue, ovvero funzioni che associano ad ogni punto del piano un numero reale, e hanno la proprietà che il valore in ogni punto è pari alla media dei valori che la funzione assume su una circonferenza centrata in quel punto. Il teorema di Liouville afferma allora che una funzione armonica limitata è costante. Questo risultato, lungi dall'essere una curiosità isolata, è invece estremamente importante nel campo della matematica noto come *analisi complessa*, e ha fra le sue conseguenze nientemeno che il celebre teorema fondamentale dell'algebra, ovvero il fatto che ogni polinomio a coefficienti reali o complessi ammetta tutte le sue radici nel campo dei numeri complessi!

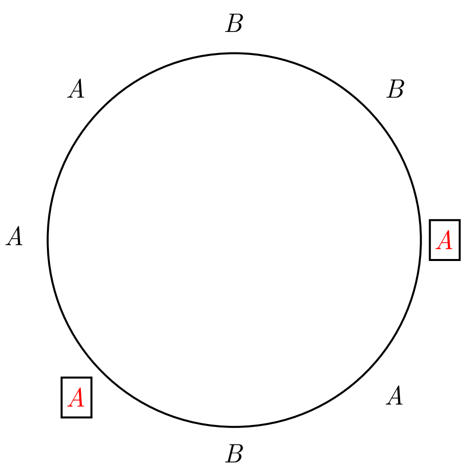
2 Il problema del ballottaggio

Alle elezioni per il rettorato dell'Università di Francuvia sono arrivate al ballottaggio le candidate Maria Agnesi (A) e Margherita Beloch (B). Maria Agnesi ha ottenuto a voti, strettamente più dei b voti di Margherita Beloch, ed ha vinto le elezioni. Durante lo spoglio dei voti, gli scrutatori hanno tenuto traccia di tutte le $a + b$ schede mentre le guardavano una per una, perciò sanno quanti voti favorevoli a ciascuna candidata erano stati scrutinati in ogni momento dello spoglio. Dimostrare che la probabilità che Maria Agnesi sia stata strettamente in vantaggio per tutta la durata dello scrutinio (ovvero che in ogni momento le schede scrutinate favorevoli ad A fossero più di quelle favorevoli a B) è $\frac{a-b}{a+b}$.

Questo è un problema famoso, che ha ricevuto molte soluzioni nel tempo (vedi Wikipedia, Bertrand's ballot theorem); qui suggeriamo due possibili approcci.

Strategia 1. Supponiamo di avere una sequenza di $a + b$ voti, di cui a per la candidata A e b per la candidata B. Pensiamo questa sequenza come 'ciclica', ovvero come scritta lungo il bordo di una circonferenza, senza un inizio e una fine precisa. Dimostrare allora che ci sono esattamente $a - b$ posizioni da cui si può iniziare a leggere la sequenza (diciamo in senso orario) in modo tale che A sia sempre in vantaggio. Ora non dovrebbe essere difficile arrivare alla conclusione!

Esempio. *Ecco un esempio del caso $a = 5$ e $b = 3$; quelle riquadrate sono le posizioni da cui si può partire per avere una sequenza in cui A sia sempre in vantaggio.*



Strategia 2. Rappresentiamo il processo di scrutinio come un cammino nel piano (cartesiano): ogni volta che viene scrutinato un voto per A facciamo un passo verso l'alto, e ogni volta che viene aperto un voto per B facciamo un passo verso destra. In questo modo, la condizione che A sia sempre in vantaggio vuol dire esattamente che questo cammino non interseca la diagonale $y = x$ (perché? Cosa succede se il primo voto scrutinato è per B?). Come si fa spesso in matematica, cerchiamo invece di contare i cammini che *non* ci vanno bene; chiamiamoli "cattivi". Ci sono quelli che iniziano con B (quanti sono?); e ci sono quelli che iniziano con A ma ad un certo punto intersecano la diagonale. Per ognuno di questi possiamo guardare la prima volta in cui il cammino interseca la diagonale; immediatamente prima deve essere stato scrutinato un voto per B, e al momento c'è una situazione di pareggio. *Riflettendo* su questa situazione, si può mostrare che i cammini 'cattivi' che iniziano con A sono in effetti tanti quanti i cammini che iniziano per B. E da qui è facile concludere... soprattutto se avete già fatto l'esercizio sui cammini della formica!

Commento. Il secondo approccio risolutivo è anche conosciuto come il *principio di riflessione*, e ha moltissime applicazioni in questioni non solo di combinatoria ma anche di probabilità, dove si rivela ad esempio uno strumento potente per studiare le proprietà del moto browniano.

3 La lotteria del sultano

Un sacchetto contiene 1001 palline numerate con interi positivi (distinti, ma sulla cui grandezza non sappiamo niente). Il sultano vi sfida al seguente gioco: vi è concesso estrarre una pallina dopo l'altra e leggere il numero che riporta, e dopo ogni estrazione potete decidere se fermarvi (tenendo l'ultima pallina estratta) o andare avanti, estraendo un'altra pallina. Ovviamente nel momento in cui estraete una nuova pallina scartate la precedente, e una volta estratta la milleunesima pallina siete obbligati a fermarvi.

Quando decidete di fermarvi, il sacchetto viene aperto e tutti i numeri rivelati. Se la pallina che avete in mano è quella con il numero più alto in assoluto avete vinto una quantità di kuruş (la moneta dei sultani) pari al vostro peso, altrimenti non avete vinto nulla. Le uniche informazioni che avete sono le regole del gioco e il numero di palline nel sacchetto.

A prima vista, sembra che le vostre probabilità di vittoria siano minime: tanto per incominciare, non avete nessuna idea di quali numeri possano essere scritti sulle palline nel sacchetto! Dimostreremo invece che in realtà esiste una strategia che permette di avere sempre una probabilità di vittoria di almeno $1/4$ – e questo perfino se invece di mille le palline fossero un milione!

Pensateci un po' prima di andare a cercare un indizio nella sezione delle soluzioni... siamo sicuri che, quando ve la diremo, concorderete che si tratta di una strategia molto ragionevole!

Lavoriamo con un numero generico n di palline. L'idea è quella di fissare una soglia $r < n$, guardare (e scartare) le prime r palline estratte – tanto per "farsi un'idea" di quanto siano grandi i numeri "tipici" scritti sulle palline – e poi fermarsi non appena si estrae una pallina con un numero più grande di tutti quelli visti fino a quel momento (se si trova... altrimenti vuol dire che la pallina migliore era fra le prime r, e purtroppo è andata!). Vogliamo ora scegliere r per avere una ragionevole speranza di vittoria.

1. Dimostrare che con questa strategia, se le palline totali sono n e le palline che guardiamo per farci un'idea sono r, la probabilità di vittoria è
$$\frac{r}{n}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)=\frac{r}{n}(H_{n-1}-H_{r-1}),$$
dove il simbolo H_n indica la somma $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.
Indicazione. Come si calcola questa probabilità? Immaginiamo di continuare a estrarre fino alla fine (anche dopo aver deciso di fermarci, tanto per vedere come sarebbe andata) e dividiamo in casi a seconda di quando estraiamo la pallina con il numero più alto. Se è la prima che estraiamo non c'è niente da fare. Nemmeno se è la seconda, o la terza, o la r-esima. Se è la i-esima con $i > r$ può ancora andarci bene: serve però che non ci siamo già fermati! Quindi serve che la migliore fra le prime $i-1$ palline sia uscita fra le prime r, altrimenti ci saremmo accontentati...

2. Mostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.

3. Supponendo (tanto per fissare le idee) che $n = 2k + 1$ sia dispari, dimostrare che possiamo scegliere r in modo che la nostra probabilità di vittoria sia almeno $1/4$.

Commento. Questo è un problema famoso, spesso citato come *il problema delle segretarie* o anche, vista una diffusa formulazione più romanzesca del quesito, *il problema della dote del sultano.* La scelta di r suggerita qui sopra, per quanto consenta di avere una probabilità di vittoria non trascurabile, non è la migliore: la strategia ottimale richiede infatti di guardare le prime $r \approx \frac{n}{e}$ palline, e per n grande garantisce come probabilità di vittoria uno strabiliante 36% (qui e è la costante di Eulero, o numero di Nepero, $e = 2.71828...$, e 36% è un'approssimazione di $1/e = 0.3678...$). Questo problema rientra nell'ambito di quella che viene chiamata *teoria dell'arresto ottimo*, uno strumento importante non solo per considerazioni astratte ma anche nelle applicazioni, ivi compreso – per esempio – lo studio matematico delle transazioni finanziarie.

Inoltre, con tecniche più raffinate si può dimostrare che quando n è grande la differenza $H_{2n} - H_n$ è approssimativamente uguale a $\log(2n) + \gamma - (\log n + \gamma) = \log 2 \approx 0.693...$, quindi (quando n è grande) la 'vera' probabilità di vittoria garantita dalla strategia appena descritta è circa $\frac{1}{2}\log 2 \approx 0.3465...$, ovvero quasi il 35%!

4 Una curiosa proprietà aritmetica

Sia n un intero positivo e a un intero coprimo con $2n$ (due interi positivi a e b si dicono *coprimi* se non hanno divisori comuni). Consideriamo l'insieme
$$S_a = \{ai \bmod 2n : i = 1, \ldots, n\},$$
dove $k \bmod 2n$ indica il resto di k nella divisione per $2n$, preso nell'intervallo $[0, 2n-1]$ (quindi, per esempio, $135 \bmod 12 = 3$). Sia poi b un intero tale che $ab \bmod 2n = 1$ e sia $S_b = \{bj \bmod 2n : j = 1, \ldots, n\}$.

1. Sia N_a il numero di elementi di S_a compresi fra 0 e $n-1$, e sia Σ_a la somma degli elementi di S_a. Dimostrare che
$$\Sigma_a = \frac{3n^2 - n}{2} - nN_a.$$

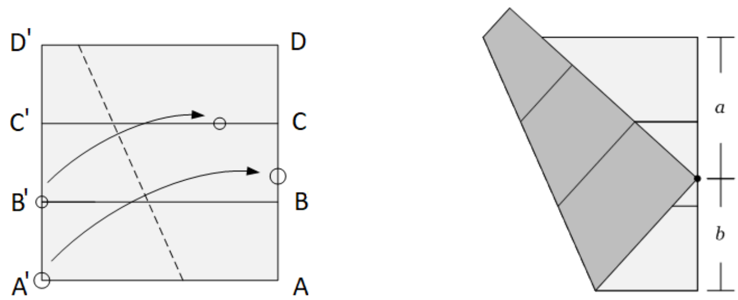
2. Sia Σ_b la somma degli elementi di S_b. Dimostrare che $\Sigma_a = \Sigma_b$.

5 Origami

Potreste aver sentito dire che i tre problemi classici dell'antichità – quadratura del cerchio, trisezione dell'angolo e duplicazione del cubo – sono irresolubili usando solo riga e compasso. Quello che è molto meno noto è che due di questi tre problemi (trisezione dell'angolo e duplicazione del cubo) sono risolubili... con gli origami! Per esempio, supponiamo di avere un cubo di lato 1, e di voler costruire un cubo di volume doppio. Chiaramente il lato di questo nuovo cubo dovrà essere $\sqrt[3]{2}$: quello che vogliamo mostrare è che – usando gli origami – è possibile partire da un segmento di lunghezza 1 (il lato del cubo originale) e costruire un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}$. Per semplicità, ci autorizziamo ad utilizzare *anche* una riga, che non sarebbe necessaria, ma semplifica la discussione. Supponiamo allora di partire con un foglio di carta quadrato di lato 1; la costruzione prevede due passi:

1. Come prima cosa dividiamo il foglio in tre strisce orizzontali della medesima altezza (sapete farlo con la riga[1]? Sapete farlo con un origami?).

2. In secondo luogo pieghiamo il foglio in modo da portare l'angolo in basso a sinistra A' a coincidere con un punto sul lato destro *e contemporaneamente* il punto B' a coincidere con un punto sul segmento $C'C$:



A questo punto il lato AD si trova ad essere diviso in due parti, di lunghezze a e b.

1. Dimostrare che $a/b = \sqrt[3]{2}$

2. Trovare una costruzione (con riga e compasso) che, dato un segmento di lunghezza 1 (per esempio il lato $A'D'$) e un segmento parallelo diviso in due parti con rapporto $\sqrt[3]{2}$ (per esempio il lato AD), produca un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}$.

6 Il giardino di Minkowski

I primi due esercizi di questa sezione sono il punto di partenza di un'area della matematica nota come *geometria dei numeri*. Sorprendentemente, infatti, si tratta di strumenti sviluppati per studiare questioni aritmetiche! Qui ci limiteremo a darne un'interessante applicazione geometrica, ma garantiamo che questi risultati hanno trovato impieghi davvero imprevisti in varie aree della matematica.

1. ($\star$) Sia M un insieme nel piano (cartesiano) di area maggiore di 1. Dimostrare che M contiene due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tali che $x_1 - x_2$ e $y_1 - y_2$ siano interi.

2. (Teorema del corpo convesso di Minkowski) Sia M un insieme nel piano che rispetti le seguenti proprietà:

   (a) M è simmetrico rispetto all'origine (ovvero per ogni punto (x, y) che stia in M anche il punto $(-x, -y)$ sta in M);

[1] Se serve, potete immaginare che il quadrato 1×1 sia solo parte di un foglio di carta più grande: non vi preoccupate se la vostra costruzione esce dal foglio.

(b) M è convesso (ovvero, dati due punti m_1, m_2 in M, l'intero segmento che congiunge m_1 con m_2 è contenuto in M);

(c) M ha area strettamente maggiore di 4.

Dimostrare che allora c'è un punto (x, y) del piano, a coordinate intere e diverso da $(0, 0)$, contenuto in M.

Suggerimento. Applicare il punto precedente all'insieme "$\frac{1}{2}M$", ovvero l'insieme $\{(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y) : (x, y) \in M\}$ (a parole: l'insieme M, riscalato di un fattore $\frac{1}{2}$ con centro l'origine).

3. Stiamo osservando la piantina di un giardino (essendo matematici, abbiamo disegnato un piano cartesiano sulla cartina). Nell'origine O del piano cartesiano si trova un gazebo. Inoltre, in ogni punto a coordinate intere (tranne l'origine) contenuto nel cerchio di centro O e raggio 50 è piantato un albero, che è semplicemente un cilindro di raggio r (quindi sulla piantina appare come un cerchio di raggio r). Dimostrare che se $r > \frac{1}{50}$ allora una persona seduta nel gazebo vede un albero in qualsiasi direzione guardi (matematicamente: ogni retta per l'origine interseca uno dei cerchi di raggio r che abbiamo tracciato).

Nota. Nella situazione del punto (3), si può verificare che se $r < \frac{1}{\sqrt{2501}} \approx \frac{1}{50.01}$, allora guardando in direzione del punto di coordinate $(50, 1)$ non si vede alcun albero. Il risultato di (3) è quindi estremamente raffinato!

7 Le funzioni binomiali

Molti di voi conosceranno i coefficienti binomiali: dati due interi m, n con $0 \leq m \leq n$, si definisce il *coefficiente binomiale* $\binom{n}{m}$ come il numero di modi di scegliere m oggetti in un insieme di n (o, più formalmente, come il numero di sottoinsiemi di cardinalità m di un insieme con n elementi). Il valore di $\binom{n}{m}$ è $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, dove $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ è il prodotto dei primi n interi positivi (chiamato n *fattoriale*; per convenzione, $0! = 1$). Riscrivendo il coefficiente binomiale come

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

diventa chiaro che, per un valore di m fissato, $\binom{n}{m}$ è un polinomio nella variabile n. Estendiamo allora la definizione di coefficiente binomiale ponendo per definizione, per ogni x numero reale,

$$\binom{x}{m} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)}{m!}.$$

Ad esempio, $\dbinom{x}{3} = \dfrac{x(x-1)(x-2)}{6}$ e $\dbinom{x}{4} = \dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$; per convenzione si pone $\binom{x}{0} = 1$ per ogni x.

1. Dimostrare che la formula $\dbinom{x+1}{m+1} - \dbinom{x}{m+1} = \dbinom{x}{m}$ vale per ogni intero $m \geq 0$ e ogni numero reale x.

2. Sia $p(n)$ la somma dei quadrati dei primi n interi positivi. Osservando che $p(n+1) - p(n) = (n+1)^2$, trovare una formula per $p(n)$. E se considerassimo la somma dei cubi?

3. ($\star$) Consideriamo un polinomio $q(x)$ a coefficienti reali con la seguente proprietà: per ogni intero n, il valore $q(n)$ è a sua volta intero. Scriviamo $q(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_0$, in modo che a_d sia il coefficiente in $q(x)$ del monomio di grado massimo. Dimostrare che $d! \cdot a_d$ è un numero intero.

Indicazione per il punto 3. Si potrebbe considerare la differenza $q(x+1) - q(x)$...

Nota. I polinomi considerati in questo problema, chiamati a volte *funzioni binomiali*, si rivelano molto utili in varie aree della matematica, fondamentalmente in virtù della seguente proprietà (che volendo potreste provare a dimostrare): ogni polinomio che assume valori interi quando calcolato per valori interi della variabile si scrive come combinazione (a coefficienti interi) delle funzioni binomiali.

8 Funzioni simmetriche

Sia (a, b, c) una soluzione del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 28 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 108. \end{cases} \tag{1}$$

Consideriamo il polinomio

$$(t-a)(t-b)(t-c) = t^3 + c_1 t^2 + c_2 t + c_3.$$

In quello che segue calcoleremo esattamente i coefficienti c_1, c_2, c_3 senza risolvere esplicitamente il sistema da cui siamo partiti!

1. Verificare che $x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)$ e dedurre il valore di $ab+bc+ca$.
2. Usando un trucco simile, determinare il valore di abc.
3. Osservare che $c_1 = -(a+b+c), c_2 = ab+bc+ca$ e $c_3 = -abc$ e dedurre i valori dei coefficienti c_1, c_2, c_3.

Supponiamo ora di ordinare le soluzioni a, b, c del sistema (1), che sono numeri reali, in modo che $a > b > c$.

4. $(\star)$ Calcolare $a^2b + b^2c + c^2a$.

Indicazione. Potrà essere utile l'identità algebrica

$$(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2 = -27p^2 - 4ps^3 + q^2s^2 + 18pqs - 4q^3,$$

dove

$$s = x+y+z, q = xy+yz+zx, p = xyz.$$

Nota. Questo esercizio si può inquadrare nel contesto della teoria delle *funzioni simmetriche*. Date n variabili $x_1, \ldots, x_n$, le *funzioni simmetriche elementari* $e_1, \ldots, e_n$ sono rispettivamente la somma delle variabili, la somma dei prodotti a due a due, la somma dei prodotti a tre a tre, ..., il prodotto di tutte le variabili. Quindi, ad esempio, per $n = 3$ le funzioni simmetriche elementari sono

$$e_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad e_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1, \quad e_3 = x_1x_2x_3,$$

corrispondenti alle precedenti s, q, p, mentre per $n = 4$ sono

$$e_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad e_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,$$

$$e_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4, \quad e_4 = x_1x_2x_3x_4.$$

In generale, un polinomio si dice *simmetrico* se scambiando in maniera qualsiasi le sue variabili esso rimane immutato: per esempio, per $n = 3$ sono polinomi simmetrici

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 \quad \text{e} \quad x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3 + x_1^3x_3^2 + x_1^2x_3^3 + x_2^2x_3^3 + x_2^3x_3^2.$$

Il teorema fondamentale delle funzioni simmetriche assicura che ogni polinomio simmetrico si può esprimere in termini delle funzioni simmetriche elementari! Ovvero, più precisamente: se $p(x_1, \ldots, x_n)$ è un polinomio simmetrico, esiste un polinomio q tale che $p(x_1, \ldots, x_n) = q(e_1, \ldots, e_n)$. Abbiamo visto questo principio in azione nel caso $n = 3$: abbiamo scritto $x^2+y^2+z^2 = e_1^2-2e_2$, e – se avete risolto l'esercizio – avrete anche scoperto come esprimere $x^3+y^3+z^3$ usando le funzioni simmetriche elementari. L'indicazione data qui sopra per il punto (4) non è altro che un caso speciale del teorema fondamentale delle funzioni simmetriche applicato al polinomio (simmetrico) $(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$. La teoria delle funzioni simmetriche è utile in molte aree della matematica, ed è anche un importante campo di studio in sé!

3 Soluzioni – Divertissement

1 Il campionato di biliardino

Ogni partita che qualcuno ha vinto è anche una partita che qualcuno ha perso. Sia n il numero di squadre del torneo: per ipotesi, il numero totale di partite vinte è almeno $5n$. Quindi anche il numero di partite perse è almeno $5n$, e quindi ogni squadra *in media* ha perso almeno 5 partite. Dal momento che il massimo di un insieme di numeri è maggiore o uguale alla media di quello stesso insieme, la squadra che ha perso il maggior numero di partite ne ha perse almeno 5.

2 I quadrati sono meglio

Chiaramente è sufficiente dimostrare che

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca.$$

D'altro canto, siccome sappiamo che i quadrati dei numeri reali sono positivi, si ha $(a-b)^2 \geq 0$, ovvero $a^2+b^2-2ab \geq 0$, da cui $a^2+b^2 \geq 2ab$. Similmente si ha anche $b^2+c^2 \geq 2bc$ e $c^2+a^2 \geq 2ac$. Sommando queste tre disuguaglianze si ottiene in effetti $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$ come voluto.

3 La cifra 1 basta e avanza!

Elenchiamo tutti i numeri $1, 11, 111, 1111, 11111, \cdots$ e per ognuno facciamo la divisione con resto per n. Siccome il resto della divisione per n è un numero intero compreso fra 0 e $n-1$, prima o poi troveremo due resti uguali fra loro. Diciamo che il numero formato da i cifre 1 e il numero formato da j cifre 1 lascino lo stesso resto r nella divisione per n, e siano q_i, q_j i rispettivi quozienti:

$$\underbrace{1\cdots1}_{i} = nq_i + r, \quad \underbrace{1\cdots1}_{j} = nq_j + r$$

Facciamo la differenza di queste due espressioni, supponendo tanto per fissare le idee che $j > i$:

$$\underbrace{1\cdots1}_{j} - \underbrace{1\cdots1}_{i} = (nq_j + r) - (nq_i + r) = n(q_j - q_i).$$

Abbiamo così trovato un multiplo di n, formato solo da cifre 0 e 1: in effetti, $\underbrace{1\cdots1}_{j} - \underbrace{1\cdots1}_{i}$ è il numero formato da $j-i$ cifre 1 seguite da i cifre 0. Riscriviamo ancora una volta l'uguaglianza che abbiamo ottenuto:

$$\underbrace{1\cdots1}_{j-i} \cdot 10^i = n(q_j - q_i).$$

Vorremmo dire che $\underbrace{1\cdots1}_{j-i}$ è multiplo di n. Osserviamo ora che se n divide $2k$ (con n dispari) allora n divide k: dato che n è dispari, il fattore 2 non gioca alcun ruolo nella divisibilità (è sufficiente pensare alla fattorizzazione – unica! – come prodotto di numeri primi). Per lo stesso motivo, se n divide $5k$, allora n divide k: in effetti l'ipotesi che la scrittura decimale di n non termini con 5 (né con 0, visto che è dispari) assicura che n non è divisibile per 5. Applicando questo ragionamento i volte, scopriamo che siccome n divide $2^i 5^i \cdot \underbrace{1\cdots1}_{j-i}$, allora n divide anche $\underbrace{1\cdots1}_{j-i}$, che è quello che volevamo.

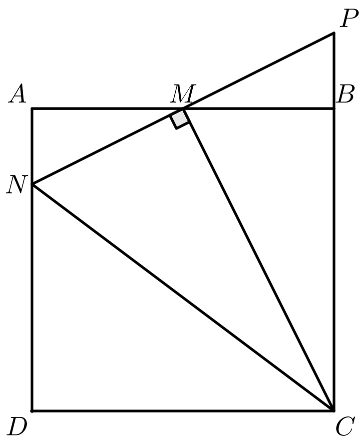
Commento. Esistono sicuramente molte altre soluzioni di questo problema; una passa dall'osservazione che il numero che (in rappresentazione decimale) è costituito da i cifre 1 si può scrivere in modo compatto come $\frac{10^i-1}{9}$. Si tratta allora di mostrare che si può scegliere i in modo tale che n divida $\frac{10^i-1}{9}$. È in effetti possibile dimostrare che se si considera la successione

$10^0 = 1, 10^1 = 10, 10^2, 10^3, \cdots$ e si fa la divisione con resto per $9n$ di ognuno dei suoi termini la successione dei resti risulta periodica (provare per credere!). Ma allora, siccome $10^0 - 1 = 0$ è divisibile per $9n$, c'è anche un altro termine della successione $10^i - 1$ che è divisibile per $9n$, e questo prova quanto voluto.

4 Un'uguaglianza di angoli

Proponiamo due soluzioni, una più rapida (che richiede tuttavia la costruzione di un punto aggiuntivo) e una più lunga ma più diretta.

Prima soluzione.



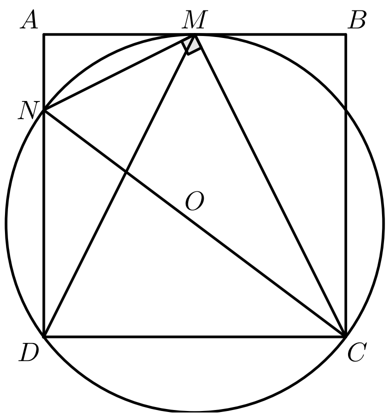
Si prolunghino il lato CB dalla parte di B ed il segmento NM dalla parte di M, e sia P la loro intersezione.
Gli angoli $\widehat{NMA}$ e $\widehat{PMB}$ sono opposti al vertice, gli angoli $\widehat{MAN}$ e $\widehat{MBP}$ sono entrambi retti e i segmenti AM e MB sono uguali per costruzione, quindi i triangoli MAN e PMB sono congruenti. I segmenti NM e MP sono allora congruenti e CM è sia altezza che mediana del triangolo PNC, che è quindi isoscele; pertanto CM è anche bisettrice, cioè $\widehat{NCM} = \widehat{MCP} = \widehat{MCB}$.

Seconda soluzione. Per semplicità scriviamo γ per la misura dell'angolo $\widehat{BCM}$. Dal momento che l'angolo in B è retto e la somma degli angoli interni di un triangolo è $180°$, si ha $\widehat{CMB} = 90° - \gamma$. D'altro canto si ha anche

$$\widehat{NMA} + \widehat{NMC} + \widehat{CMB} = 180°$$

perché questi tre angoli insieme formano un angolo piatto, e per ipotesi $\widehat{NMC} = 90°$. Ne segue $\widehat{NMA} = 90° - \widehat{CMB} = 90° - (90° - \gamma) = \gamma$. Ne segue che i triangoli MAN e CBM sono simili, perché hanno due angoli uguali (e quindi, per differenza, anche il terzo angolo deve essere uguale). Osserviamo in particolare che $\widehat{MNA} = 90° - \gamma$.

Osserviamo che il quadrilatero $MNDC$ può essere inscritto in una circonferenza: in effetti, esso è formato da due triangoli rettangoli (MCN e CDN) con l'ipotenusa in comune: basta allora ricordare che la circonferenza circoscritta ad un triangolo rettangolo è la circonferenza che ha per diametro l'ipotenusa.



Osserviamo allora che gli angoli $\widehat{CNM}$ e $\widehat{CDM}$ insistono entrambi sull'arco CM, e quindi sono uguali. D'altro canto, $\widehat{CDM} = \widehat{MCD}$ in quanto il triangolo CMD è isoscele (M è il punto medio di AB). Complessivamente abbiamo ottenuto

$$\begin{aligned} 90^\circ - \gamma &= \widehat{MCD} = \widehat{CDM} \\ &= \widehat{CNM} = \widehat{CNA} - \widehat{MNA} \\ &= (180^\circ - \widehat{DNC}) - (90^\circ - \gamma) \\ &= \gamma + (90^\circ - \widehat{DNC}), \end{aligned}$$

ovvero

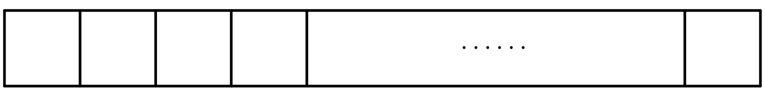
$$\widehat{DNC} = 2\gamma.$$

Osserviamo infine che $\widehat{DNC} = \widehat{BCN}$ in quanto angoli alterni per le parallele AD, BC tagliate dalla trasversale NC. Si ha quindi $\widehat{BCN} = 2\gamma$, ma d'altro canto $\widehat{BCN} = \widehat{BCM} + \widehat{MCN} = \gamma + \widehat{MCN}$, quindi $2\gamma = \gamma + \widehat{MCN} \Rightarrow \gamma = \widehat{MCN}$, che è quello che volevamo dimostrare.

5 Cammini nel piano

Immaginiamo di trascrivere su un foglio le mosse della formica: ogni volta che essa si muove verso destra scriviamo una D, e ogni volta che si muove verso l'alto scriviamo una A. Alla fine degli $a + d$ secondi avremo quindi scritto a lettere A e d lettere D, ovvero avremo un anagramma della stringa di lettere $\underbrace{A \cdots A}_{a \text{ volte}}\underbrace{D \cdots D}_{d \text{ volte}}$. Viceversa, ogni anagramma di questa stringa di lettere fornisce un set di istruzioni per la formica che la porta in effetti nel punto di coordinate (d, a). Si tratta quindi di contare gli anagrammi di $\underbrace{A \cdots A}_{a \text{ volte}}\underbrace{D \cdots D}_{d \text{ volte}}$.

Un modo di procedere è ora il seguente. Supponiamo di avere di fronte a noi una serie di $a + d$ caselle vuote:



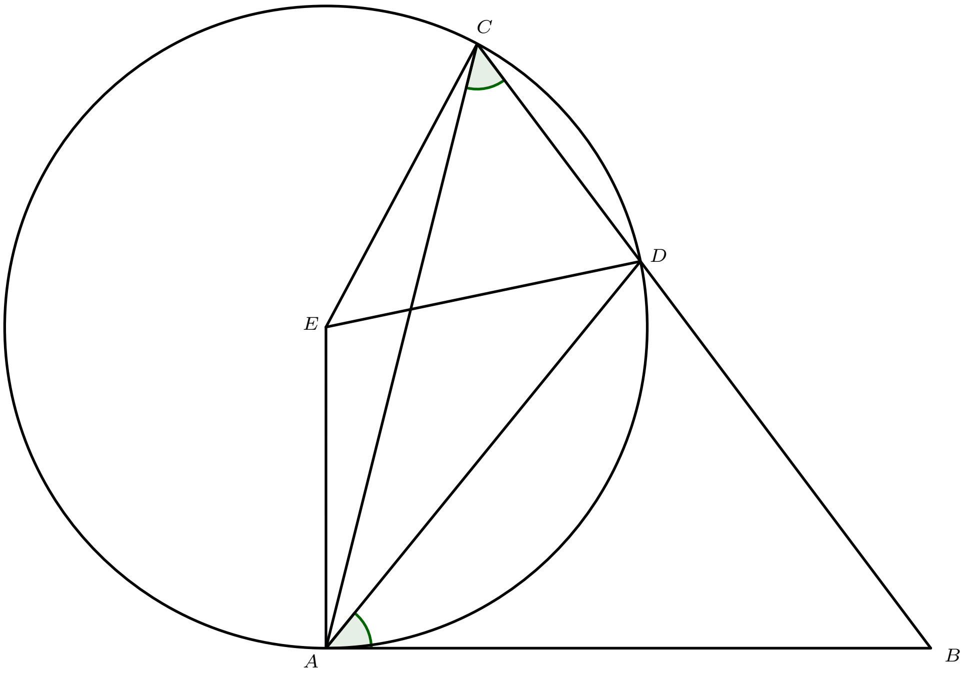
Vogliamo riempirle con a lettere A e d lettere D: naturalmente è sufficiente scegliere le a caselle dove scrivere una A, perché le caselle in cui scrivere D saranno allora automaticamente determinate. Ne segue che il numero di anagrammi è uguale al numero di scelte di a caselle fra $a+d$, ovvero il numero di anagrammi (e quindi anche il numero di percorsi) è

$$\binom{a+d}{a} = \binom{a+d}{d} = \frac{(a+d)!}{a!d!}$$

6 Monete alla cieca

Alessandra sceglie 80 monete e le capovolge tutte; come due gruppi, sceglie queste 80 monete e le rimanenti 20. Questa strategia funziona perché se le 80 monete mostravano originariamente k teste e $80-k$ croci, ora mostrano k croci e $80-k$ teste. D'altro canto, inizialmente c'erano 80 teste in tutto, di cui k nel gruppo scelto da Alessandra e $80-k$ nell'altro: alla fine, quindi, entrambi i gruppi contengono lo stesso numero di teste, ovvero $80-k$.

7 Un po' di geometria



Il punto E è il centro della circonferenza circoscritta ad ADC, quindi $\widehat{DEC} = 2\widehat{DAC}$, in quanto angoli al centro e alla circonferenza che insistono sul medesimo arco. Osserviamo poi che il triangolo CED è isoscele: si ha quindi

$$\widehat{CDE} = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{DEC}\right) = 90^\circ - \widehat{DAC}.$$

Infine, i triangoli BAD e BCA sono simili, dato che hanno un angolo congruente e uno in comune: si ha in particolare $\widehat{ADB} = \widehat{BAC}$, da cui ricaviamo

$$\begin{aligned} \widehat{EDA} &= \widehat{CDA} - \widehat{CDE} = \widehat{CDA} - 90^\circ + \widehat{DAC} \\ &= 180^\circ - \widehat{ADB} - 90^\circ + \widehat{DAC} \\ &= 180^\circ - \widehat{BAC} - 90^\circ + \widehat{DAC} \\ &= 90^\circ - \widehat{BAD}. \end{aligned}$$

Dal fatto che DEA è isoscele otteniamo la tesi: infatti $\widehat{BAE} = \widehat{DAE} + \widehat{BAD} = \widehat{EDA} + \widehat{BAD} = 90° - \widehat{BAD} + \widehat{BAD} = 90°$.

8 Una curiosa coincidenza

Dopo aver calcolato $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 = 361 = 19^2$ e $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 1 = 841 = 29^2$ qualche sospetto viene! Si può allora congetturare che $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ sia sempre un quadrato perfetto. Una buona domanda è: il quadrato *di quale numero*? Certamente $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ è più grande di $n^4 = (n^2)^2$ (ma non di moltissimo), quindi – se è un quadrato – dovrà essere il quadrato di n^2 + qualcosa di piccolo: cerchiamo allora di capire se riusciamo a trovare un'uguaglianza del tipo

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+an+b)^2.$$

Vorremmo determinare a e b minimizzando i nostri calcoli. Per esempio: se la nostra uguaglianza deve funzionare per ogni n, dovrà in particolare funzionare quando $n = 0$, da cui otteniamo $1 = b^2$, ovvero $b = \pm 1$. Allo stesso modo, per $n = 1$ otteniamo $25 = (a+b+1)^2$; inoltre sappiamo che n^2+an+b dev'essere un po' più grande, e non un po' più piccolo, di n^2, per cui a dovrà essere positivo, e probabilmente $a+b+1$ dovrà essere uguale a 5 (e non -5). Provando allora con $b = 1$ otteniamo $a = 3$: la nostra congettura diventa

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n+1)^2,$$

ed è ora facile verificare che in effetti queste due espressioni sono uguali (entrambe sono uguali a $n^4+6n^3+11n^2+6n+1$). Quindi in effetti il prodotto di quattro interi consecutivi incrementato di 1 è sempre un quadrato perfetto!

Se ora per un qualche valore di n il numero $n(n+1)(n+2)(n+3)$ fosse un quadrato perfetto, diciamo x^2, allora avremmo che $n(n+1)(n+2)(n+3) = x^2$ e $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = y^2$, dove $y = n^2+3n+1$. Indipendentemente dallo specifico valore di y, avremmo trovato due quadrati perfetti consecutivi: $y^2 = x^2+1$. Ma allora avremmo $y^2 - x^2 = 1$, ovvero $(y-x)(y+x) = 1$: l'unica possibilità è allora $y - x = y + x = 1$, ovvero $y = 1, x = 0$, ma questo contraddice il fatto che n sia un intero positivo.

9 Divisibilità

Iniziamo osservando che due numeri interi consecutivi, n ed $n+1$, non possono avere divisori in comune: infatti, se un intero positivo d dividesse sia n che $n+1$, allora dividerebbe la loro differenza, che però è 1, e quindi si dovrebbe avere $d = 1$. La prima domanda del problema è ora immediata: se si prendono $n+1$ interi compresi fra 1 e $2n$ se ne sono necessariamente scelti due consecutivi, che in particolare – per quanto appena detto – non hanno divisori in comune.

Per la seconda domanda, scriviamo ogni intero fra 1 e $2n$ nella forma $d \cdot 2^r$, dove d è un intero dispari. Organizziamo poi questi numeri in una tabella, dividendoli in colonne a seconda del valore di d: per esempio, per $n = 12$ la tabella è come segue.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
$1 = 1 \cdot 2^0$	$3 = 3 \cdot 2^0$	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
$2 = 1 \cdot 2^1$	$6 = 3 \cdot 2^1$	10	14	18	22						
$4 = 1 \cdot 2^2$	$12 = 3 \cdot 2^2$	20									
$8 = 1 \cdot 2^3$	$24 = 3 \cdot 2^3$										
$16 = 1 \cdot 2^4$											

Ora, quante colonne ha la tabella? Esattamente n: i possibili valori di d sono tutti e soli i numeri dispari fra 1 e $2n$, che sono n. Quindi quando scegliamo $n+1$ numeri fra 1 e $2n$ ne stiamo necessariamente prendendo due dalla stessa colonna! Ma questi saranno uno della forma $d \cdot 2^{r_1}$ e l'altro della forma $d \cdot 2^{r_2}$, diciamo con $r_1 < r_2$: si ha allora

$$\frac{d \cdot 2^{r_2}}{d \cdot 2^{r_1}} = 2^{r_2 - r_1},$$

che è un numero intero: come voluto, uno di questi due numeri divide l'altro!

10 Ci sarà un primo?

Certamente $n+2$ è divisibile per 2, perché somma di due numeri pari ($n = 2019! = 2 \times 3 \times \cdots$ è divisibile per 2). Similmente $n+3$ è divisibile per 3, perché sia $n = 3 \times (2 \times 4 \times 5 \times \cdots)$ che 3 sono multipli di 3. In generale, se $i \leq 2019$ il numero $n+i$ è multiplo di i, perché n è multiplo di i. Ne segue che nessuno dei numeri $n+2, n+3, \ldots, n+2019$ è primo, perché $n+i$ è certamente più grande di i, e quindi non è primo perché ha il divisore non banale i.

Sia n il numero dato dalla sequenza di cifre fissata. Ovviamente il primo tentativo è quello di considerare $\sqrt{n}$, che però di solito non sarà un intero; possiamo allora considerare $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, la parte intera di $\sqrt{n}$, e sperare che le prime cifre di m^2 siano proprio le cifre di n. Ovviamente questo in generale non succede, e intuitivamente il motivo è che nell'approssimare $\sqrt{n}$ con $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ facciamo un errore percentuale probabilmente abbastanza grosso. Un'idea per diminuire l'errore percentuale è questa: moltiplichiamo n per 10^{2k} con k molto grande.

11 Pianificazione stradale

Se A e B sono collegate direttamente non c'è niente da dimostrare, quindi supponiamo che non sia così. Diciamo che una città è *lontana* da un'altra se non c'è una strada che le collega direttamente.

Chiamiamo S l'insieme delle 2018 città che non sono né A né B. Per ipotesi, al massimo 2020-1-1010=1009 città sono lontane da A (il -1 è dovuto ad A stessa), e una di queste è B, dunque fra le 2018 città in S al massimo 1008 sono lontane da A. Simmetricamente, al massimo 1008 sono lontane da B, e quindi in totale al massimo 2016 città sono lontane o da A, o da B. Ne segue che ci sono almeno $2 = 2018 - 2016$ città che non sono lontane né da A, né da B, ovvero che sono collegate direttamente ad entrambe: possiamo prendere come C una qualunque di queste città.

12 Una sequenza esplosiva

L'osservazione cruciale (e per niente banale) è la seguente: se un numero si scrive nella forma $x = \frac{A+1/A}{2}$, allora

$$2x^2 - 1 = \left(\frac{A+1/A}{2}\right)^2 - 1 = \frac{A^2 + 1/A^2 + 2}{2} - 1 = \frac{A^2 + 1/A^2}{2}.$$

Quindi se riusciamo a scrivere a_0 nella forma $\frac{A+1/A}{2}$ avremo $a_1 = \frac{A^2+1/A^2}{2}$, poi $a_2 = \frac{A^4 + 1/A^4}{2}$, e così via fino a $a_n = \frac{A^{2^n} + 1/A^{2^n}}{2}$. Si tratta quindi di risolvere l'equazione

$$3 = a_0 = \frac{A+1/A}{2}$$

nell'incognita A; moltiplicando tutto per $2A$, questa diventa $6A = A^2 + 1$, che ha come soluzioni $A_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Osserviamo che le due soluzioni A_1 e A_2 sono l'una l'inversa dell'altra, quindi $A_1 + 1/A_1 = 1/A_2 + A_2$, e possiamo scegliere indifferentemente A_1 o A_2. In conclusione otteniamo

$$a_n = \frac{A_1^{2^n} + 1/A_1^{2^n}}{2} = \frac{(3+2\sqrt{2})^{2^n} + (3-2\sqrt{2})^{2^n}}{2}.$$

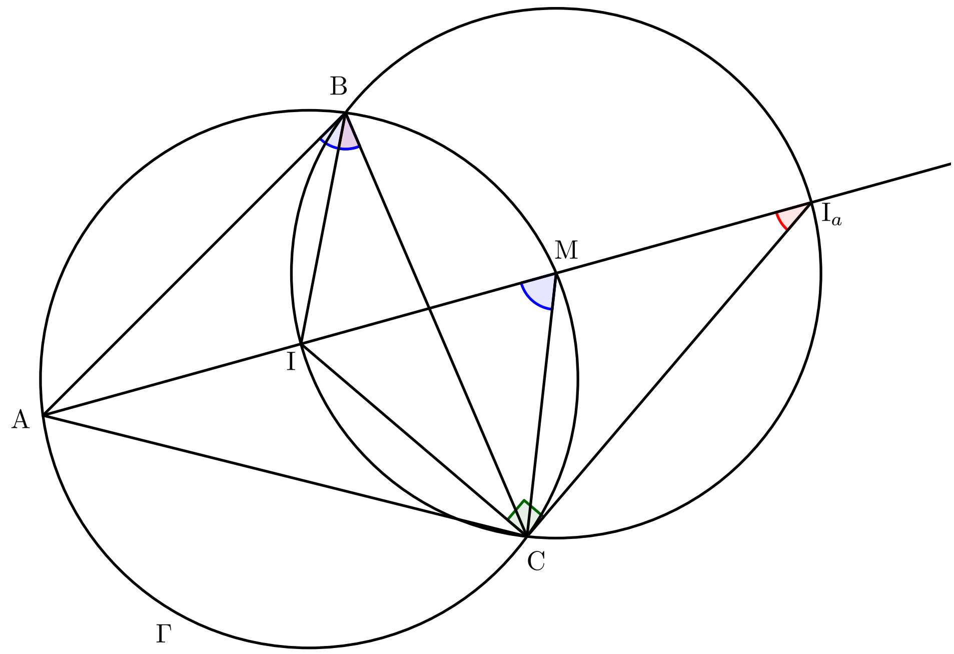
Nota. Si osservi che $3 - 2\sqrt{2} \approx 0.171573...$ è un numero minore di 1, quindi le sue potenze tendono molto velocemente a 0. Ne segue che il numero intero $2a_n$ è estremamente vicino a

$(3+2\sqrt{2})^{2^n}$, che quindi (nonostante sia un numero irrazionale) deve essere estremamente vicino ad un numero intero. In effetti si ha per esempio $(3+2\sqrt{2})^8 = 1331713.999999248...$, e

$$(3+2\sqrt{2})^{16} = 1773462177793.99999999999943613119...,$$

in cui le prime *dodici* cifre dopo la virgola sono 9.

13 Excentri



Osserviamo innanzitutto che A, I, M e I_a sono allineati: da un lato M è punto medio dell'arco BC, e quindi fa parte della bisettrice di $B\widehat{A}C$, a cui appartiene anche I; dall'altro, I_a appartiene alle bisettrici degli angoli supplementari di $A\widehat{C}B$ e $A\widehat{B}C$, quindi è equidistante dai prolungamenti di AB e AC, e dunque fa parte della bisettrice di $B\widehat{A}C$. Notiamo ora che $I\widehat{C}I_a$ è retto, perché somma di angoli che sono la metà di angoli supplementari (metà di $B\widehat{C}A$ più metà dell'angolo esterno corrispondente), così come $I\widehat{B}I_a$. Ne segue che il quadrilatero $BICI_a$ è inscrivibile in una circonferenza con diametro II_a. Allora $I\widehat{I_a}C = I\widehat{B}C = \frac{1}{2}A\widehat{B}C$. Inoltre $A\widehat{M}C = I\widehat{M}C = A\widehat{B}C$, perché $A\widehat{M}C$ e $A\widehat{B}C$ insistono entrambi sulla corda AC di Γ. Abbiamo allora ottenuto che M sta su II_a (diametro della circonferenza circoscritta a $BICI_a$) e che $I\widehat{M}C = 2I\widehat{I_a}C$: ne segue che M è il centro della circonferenza circoscritta a $BICI_a$, e quindi il punto medio del diametro II_a.

14 Vladimir e Arnold

Sia t il tempo (misurato in ore) fra il sorgere del sole e mezzogiorno, e siano v_V e v_A le velocità di Vladimir e Arnold rispettivamente (misurate in unità di lunghezza all'ora). Sia inoltre C il punto lungo la strada in cui si incontrano. Sappiamo allora che in un tempo t Vladimir ha percorso il tragitto da A a C, dunque $AC = v_V \cdot t$, mentre Arnold ha percorso il tragitto da B a C, per cui $BC = v_A \cdot t$. D'altro canto, Vladimir impiega 4 ore per arrivare da C a B, dunque $BC = 4v_V$, mentre Arnold ne impiega 9 per arrivare da C ad A, quindi $AC = 9v_A$. Consideriamo ora tutte le equazioni che abbiamo ottenuto:

$$\begin{cases} AC = v_V \cdot t = 9v_A \\ BC = v_A \cdot t = 4v_V \end{cases}$$

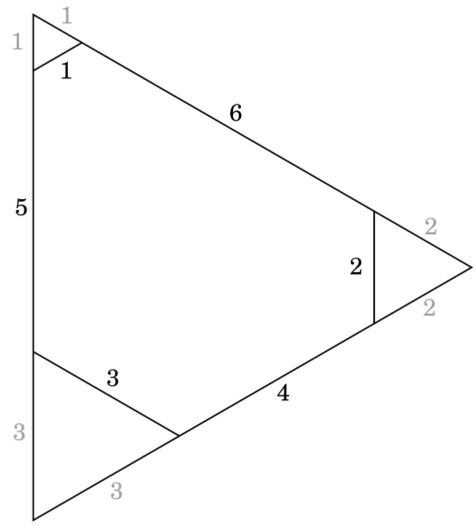
Moltiplicando queste due equazioni termine a termine otteniamo

$$AC \cdot BC = v_V \cdot v_A \cdot t^2 = 36 v_A v_V,$$

da cui evidentemente $t^2 = 36$ e $t = 6$. Quando si incontrano a mezzogiorno, Vladimir e Arnold stanno camminando da 6 ore: il sole è quindi sorto alle 6 di mattina.

15 Un esagono speciale

Senza parole:



16 16 cifre e un quadrato

Se una delle cifre è 0 è sufficiente prendere quella cifra (in effetti 0 è un quadrato perfetto), quindi possiamo supporre che nessuna delle cifre sia nulla. In tal caso, dette $c_1, c_2, \ldots, c_{16}$ le prime 16 cifre del numero, abbiamo in particolare a disposizione i 16 numeri $n_1 = c_1$, $n_2 = c_1c_2$, $n_3 = c_1c_2c_3$, e così via fino a $n_{16} = c_1c_2 \cdots c_{16}$. Ognuno di questi numeri (interi positivi) avrà una fattorizzazione in primi, ma siccome ogni cifra è un numero ≤ 9 gli unici primi che possono effettivamente intervenire nella fattorizzazione sono 2, 3, 5 e 7. Inoltre, un numero è un quadrato perfetto se e soltanto se nella sua fattorizzazione in primi ognuno degli esponenti è pari. Scriviamo allora $n_i = 2^{w_i} 3^{x_i} 5^{y_i} 7^{z_i}$, e ad ognuno dei 16 n_i associamo l'informazione (w_i, x_i, y_i, z_i). Adesso, l'unica cosa che davvero ci interessa è la parità di questi esponenti, e possiamo quindi osservare che ci sono esattamente 16 possibili combinazioni di parità degli esponenti (scrivendo "P" e "D" per "Pari" e "Dispari" rispettivamente, la quaterna di esponenti può essere ad esempio (P, P, D, P), come per il numero $79380 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2$, o (D, D, D, P), come per il numero $30 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0$). Possiamo allora considerare due casi:

1. Le 16 combinazioni di parità degli esponenti sono tutte diverse: allora, visto che ci sono 16 combinazioni possibili in tutto, una di esse deve essere (P, P, P, P), e abbiamo trovato il quadrato perfetto che volevamo;

2. Due delle 16 combinazioni sono uguali, diciamo quelle che corrispondono a n_i e ad n_j (con $i < j$). Si può allora notare che n_j/n_i è numero intero (è semplicemente il prodotto delle cifre in posizione $i+1, \ldots, j$), e che gli esponenti nella sua fattorizzazione sono tutti pari: in

effetti, scrivendo di nuovo $n_i = 2^{w_i}3^{x_i}5^{y_i}7^{z_i}$ e $n_j = 2^{w_j}3^{x_j}5^{y_j}7^{z_j}$, il rapporto n_j/n_i si scrive $2^{w_j-w_i}3^{x_j-x_i}5^{y_j-y_i}7^{z_j-z_i}$, e tutti gli esponenti sono pari in quanto differenza di due numeri con la stessa parità. D'altro canto, come già osservato n_j/n_i è il prodotto di un certo numero di cifre consecutive all'interno del nostro numero originale, e quindi una possibile soluzione al problema.

Esempio. Consideriamo il numero 3765273552834195. Abbiamo allora

$$\begin{aligned}
n_1 &= 3 = 2^0 3^1 5^0 7^0 \to (P, D, P, P)\\
n_2 &= 3 \cdot 7 = 2^0 3^1 5^0 7^1 \to (P, D, P, D)\\
n_3 &= 3 \cdot 7 \cdot 6 = 2^1 3^2 5^0 7^1 \to (D, P, P, D)\\
n_4 &= 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 2^1 3^2 5^1 7^1 \to (D, P, D, D)\\
n_5 &= 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 = 2^2 3^2 5^1 7^1 \to (P, P, D, D)\\
n_6 &= 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 = 2^2 3^2 5^1 7^2 \to (P, P, D, P)\\
n_7 &= 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 = 2^2 3^3 5^1 7^2 \to (P, D, D, P)\\
n_8 &= 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 3^3 5^2 7^2 \to (P, D, P, P)
\end{aligned}$$

Ci possiamo fermare qui: in effetti la combinazione (P, D, P, P) si è già ripetuta, in corrispondenza di n_8 ed n_1. Basta quindi considerare $n_8/n_1 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5$ per trovare un quadrato perfetto, e in effetti $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 44100 = 210^2$.

17 Se 100 cerchi non bastano, prova con 400

Consideriamo un punto qualsiasi del tavolo: affermiamo che esso si trova a distanza ≤ 2 dal centro di uno dei 100 cerchi già disegnati. In effetti, detto P il punto che stiamo considerando, se la sua distanza dai centri di tutti i cerchi già presenti fosse almeno 2, allora potremmo disegnare un cerchio di raggio 1 centrato in P, e questo non intersecherebbe alcuno dei cerchi già disegnati (se due cerchi di raggio 1 si intersecano, allora i loro centri sono a distanza al massimo 2). Quanto appena dimostrato si riformula esattamente dicendo che i 100 cerchi di raggio 2 concentrici con quelli già dati coprono tutto il rettangolo, che era quanto volevamo dimostrare.

Per la seconda domanda consideriamo invece 4 copie del rettangolo originale, disposte come in figura:

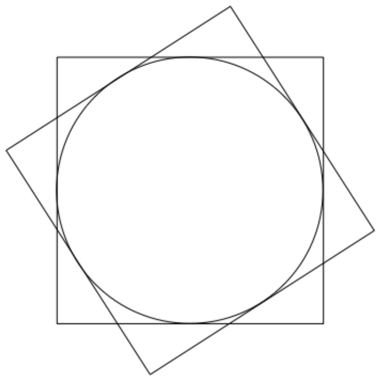
Se i lati di R erano a e b otteniamo quindi un rettangolo di lati $2a$ e $2b$, che chiamiamo $2R$. Ognuna delle 4 copie di R si copre con 100 cerchi di raggio 2 per quanto abbiamo appena dimostrato, quindi $2R$ si copre con 400 cerchi di raggio 2. Riscalando l'intera figura di un fattore $\frac{1}{2}$, il rettangolo $2R$ diventa precisamente un rettangolo di lati a e b, dunque un rettangolo congruente a quello di partenza, mentre i 400 cerchi di raggio 2 (che coprivano $2R$) diventano 400 cerchi di raggio 1 che coprono un rettangolo di dimensioni $a \times b$, come voluto.

18 Dadi

La probabilità è $\frac{1}{2}$. In effetti, immaginiamo di cominciare lanciando i primi 99 dadi e sommare i risultati. Se otteniamo un numero pari, allora la somma di tutti e 100 i risultati dei dadi sarà pari se e solo se all'ultimo lancio otteniamo un numero pari (probabilità $3/6 = 1/2$). D'altro canto, se la somma dei primi 99 è dispari, allora la somma di tutti e 100 i risultati sarà pari se e solo se l'ultimo dado dà un risultato dispari (probabilità $3/6 = 1/2$). Quindi in entrambi i casi abbiamo probabilità $\frac{1}{2}$ di ottenere una somma pari, e quindi la probabilità complessiva di ottenere una somma pari è anch'essa $\frac{1}{2}$.

19 Due quadrati

Osserviamo che i due quadrati si possono ottenere l'uno dall'altro tramite una (opportuna) rotazione intorno al loro comune centro P. Consideriamo ora il cerchio C avente centro in P e raggio $\frac{1}{2}$. Qualunque rotazione dei quadrati intorno a P lascia C inalterato, per cui è immediato rendersi conto che l'intersezione dei due quadrati contiene l'intero cerchio C. D'altro canto, C ha area $\pi r^2 = \frac{\pi}{4} > \frac{3}{4}$. Ne segue che anche l'intersezione dei due quadrati ha area maggiore di $\frac{3}{4}$.



20 Ancora quadrati

Sia a l'intero dato dalla sequenza di cifre voluta, e scegliamo un intero positivo pari k tale che $a < 10^k$ (ad esempio si può prendere come k il numero di cifre di a, eventualmente incrementato di uno in caso fosse dispari).

Sia ora b la parte intera di $\sqrt{a}\cdot 10^{2k}$ (la parte intera di un numero reale positivo è semplicemente il numero reale privato delle sue cifre dopo la virgola). Osserviamo in particolare che $b \leq \sqrt{a}\cdot 10^{2k} < b+1$. Consideriamo allora $(b+1)^2$: si ha $(b+1)^2 > (\sqrt{a}\cdot 10^{2k})^2 = a \cdot 10^{4k}$, e d'altro canto $b+1 \leq \sqrt{a}\cdot 10^{2k}+1$, da cui (usando anche $a < 10^k$) otteniamo

$$(b+1)^2 \leq (\sqrt{a}\cdot 10^{2k})^2 + 1 + 2(\sqrt{a}\cdot 10^{2k}) < a \cdot 10^{4k} + 1 + 2\cdot 10^{k/2+2k}.$$

Osserviamo ora che $a \cdot 10^{4k}$ è un numero che inizia con le stesse cifre di a, seguite da $4k$ zeri, e $(b+1)^2$ è ottenuto da $a\cdot 10^{4k}$ aggiungendo un numero r minore di $1+2\cdot 10^{k/2+2k}$. Quindi, a patto che $1+2\cdot 10^{k/2+2k}$ sia costituito da non più di $4k$ cifre, anche r si scriverà con non più di $4k$ cifre, e quindi la somma $a\cdot 10^{4k}+r$ inizierà ancora con le stesse cifre di a (in effetti, le cifre di r vanno a sommarsi ai $4k$ zeri finali, senza interagire con le cifre di a). D'altro canto, $1+2\cdot 10^{k/2+2k}$ si scrive con esattamente $\frac{k}{2}+2k+1$ cifre, quindi abbiamo finito purché $\frac{5}{2}k+1 \leq 4k$, disuguaglianza che è vera per ogni k intero positivo pari.

Per vedere il meccanismo in azione, proviamolo con $a = 1793$. Possiamo allora prendere $k = 4$; si ha $\sqrt{1793}\cdot 10^8 = 423438307.194...$, quindi prendiamo $b = 423438307$. Si ha allora $(b+1)^2 = 179300000681902864$: come si vede questo numero inizia con le stesse cifre di a, seguite da un certo numero di zeri, e infine da un "errore" dato dalle cifre 681902864.

21 Polinomi di polinomi di polinomi...

1. Scriviamo $P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0$. Allora $P(b) - P(a) = c_n b^n + c_{n-1}b^{n-1} + \cdots + c_0 - \big(c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_0\big)$; riorganizzando i termini, possiamo riscrivere questa espressione nella forma

$$P(b) - P(a) = c_n(b^n - a^n) + c_{n-1}(b^{n-1} - a^{n-1}) + \cdots + c_1(b - a). \tag{2}$$

D'altro canto, per ogni intero positivo h abbiamo $b^h - a^h = (b-a)(b^{h-1} + b^{h-2}a + \cdots + a^{h-1})$, quindi $b - a$ divide ognuno degli addendi in (2), e quindi divide anche $P(b) - P(a)$.

2. Definiamo $x_0 = t$, $x_{i+1} = P(x_i)$, e $d_i = x_{i+1} - x_i$ per ogni $i \geq 0$. Se $d_0 = 0$ abbiamo già finito (infatti in tal caso si ha $x_1 = x_0 = t$ e quindi $x_2 = P(x_1) = P(t) = x_1 = t$), quindi supponiamo $d_0 \neq 0$.

Dal punto precedente sappiamo che $d_i = x_{i+1} - x_i$ divide $P(x_{i+1}) - P(x_i) = x_{i+2} - x_{i+1} = d_{i+1}$. D'altro canto, per ipotesi la sequenza $\{x_i\}$ prima o poi si ripete, e quindi prima o poi c'è un indice k per cui $d_k = d_0$. Ma allora abbiamo che d_0 divide d_1, che divide d_2, che divide d_3, ..., che divide $d_k = d_0$. Siccome i d_i sono tutti interi, questo implica chiaramente che i d_i sono tutti uguali *in valore assoluto*. In particolare, d_1 è uguale o a d_0 o a $-d_0$. Nel secondo caso,

$$P(P(t)) = x_2 = x_1 + (x_2 - x_1) = x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) = x_0 + d_1 + d_0 = x_0 = t$$

come voluto. Nel primo caso ($d_1 = d_0$), invece, abbiamo che $d_2 = d_1$: in effetti, se per caso $d_2 = -d_1$, lo stesso ragionamento di prima (applicato a partire dal secondo termine) dice che la sequenza è $t, t + d_0, t + 2d_0, t + d_0, t + 2d_0, \ldots$, e quindi il primo termine non si ripresenta mai più, contraddicendo le ipotesi. Si ha quindi $d_2 = d_1 = d_0$, e continuando allo stesso modo otteniamo $d_3 = d_2$, eccetera, per cui $x_k = t + kd_0$, e il primo termine della sequenza non si ripete mai, contraddicendo nuovamente le ipotesi. Abbiamo quindi escluso il primo caso, e d'altro canto nel secondo caso abbiamo mostrato che si ha $P(P(t)) = t$ come voluto.

22 Interi consecutivi

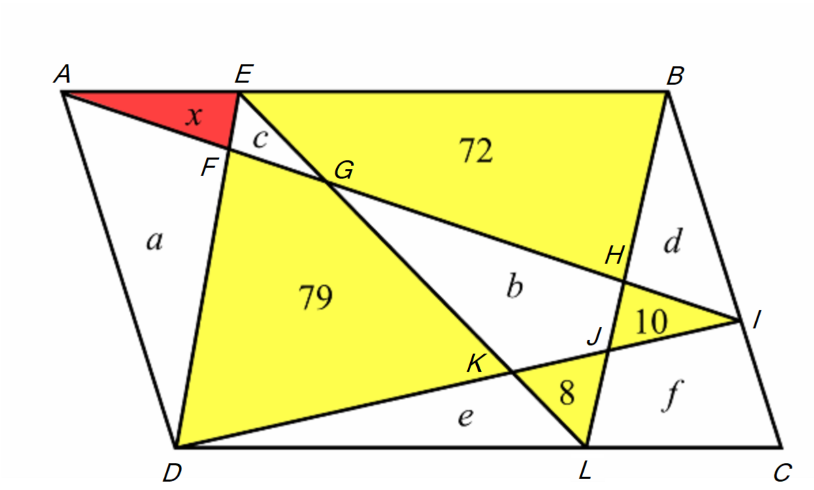
La somma di n interi consecutivi, diciamo gli interi $a + 1, a + 2, \ldots, a + n$, è data da na più la somma degli interi da 1 ad n, ovvero è uguale a $na + \frac{n(n+1)}{2} = n\frac{2a+n+1}{2}$. Questo numero è divisibile per n se e soltanto se $\frac{2a+n+1}{2}$ è intero, quindi se e soltanto se $2a + n + 1$ è pari. Dal momento che $2a$ è sempre pari, questo accade se e solo se n è dispari. In conclusione, la proprietà voluta vale per tutti e soli i numeri dispari!

23 Una lunga lista di numeri

Notiamo innanzitutto che i numeri che iniziano con la cifra 1 sono più piccoli di tutti i numeri che iniziano con la cifra 2, che a loro volta sono più piccoli di quelli che iniziano con la cifra 3, e così via fino alla cifra 7. D'altro canto, quanti sono i numeri nella nostra lista che iniziano con la cifra 1? Sono tanti quanti gli anagrammi delle cifre $\{2, \ldots, 7\}$, ovvero $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. La nostra lista inizia quindi con 720 numeri la cui cifra iniziale è 1. Questi sono seguiti da 720 numeri la cui cifra iniziale è 2, e da altri 720 numeri la cui cifra iniziale è 3. Ora $720 + 720 < 2021 < 720 + 720 + 720$, quindi il 2021-esimo numero si trova fra quelli che iniziano con la cifra 3. Togliendo dalla nostra lista i primi 1440 numeri, quello che ci interessa è il numero in posizione $2021 - 1440 = 581$ fra quelli rimasti. Tutti i primi 720 numeri della nuova lista iniziano con la cifra 3, seguita da un anagramma di $\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$. Quanti sono quelli la cui seconda cifra è 1? Sono $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Quindi i primi 120 numeri nella lista sono della forma 31..., poi ci sono 120 numeri della forma 32..., poi 120 della forma 34..., ancora 120 della forma 35... (e siamo a 480), e i successivi 120 sono della forma 36... (e siamo arrivati a 600). Il nostro numero misterioso si trova quindi in questa zona: è perciò della forma 36.... Eliminando tutti i numeri le cui prime cifre sono $31, 32, 34$ o 35 (480 numeri) dalla nostra lista ci chiediamo allora quale sia l'elemento in posizione $581 - 480 = 101$ della nuova lista. I primi elementi in questo elenco sono 24 numeri che iniziano con le cifre 361, 24 che iniziano con 362, 24 con 364, e poi 24 con 365 (per un totale di 96). Stiamo quindi cercando il quinto numero che inizia con le cifre 367: scrivendo esplicitamente i numeri di questo tipo in ordine crescente troviamo $3671245, 3671254, 3671425, 3671452$, e infine il numero voluto, ovvero 3671524.

24 Un gioco da bambini

Facciamo riferimento alla figura qui sotto, in cui le lettere maiuscole indicano punti e le lettere minuscole le aree delle diverse regioni (immagine rielaborata a partire da `https://www.youtube.com/watch?v=OuJQaxZvlYs`, dove si può trovare una versione animata di questa soluzione).



L'osservazione chiave è che la somma di alcune delle aree evidenziate è equivalente a metà dell'area del quadrilatero $ABCD$. Guardiamo ad esempio i triangoli ADE e ELB e consideriamoli come aventi basi rispettive AE ed EB, ed aventi come altezza comune l'altezza h del parallelogramma $ABCD$. La somma delle loro aree è allora

$$\frac{AE \cdot h}{2} + \frac{EB \cdot h}{2} = \frac{AB \cdot h}{2},$$

ovvero è metà della superficie S del parallelogramma. Si ha in particolare $x + a + 72 + b + 8 = \frac{S}{2}$. Con lo stesso ragionamento otteniamo le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x + a + 72 + b + 8 = \frac{S}{2} \\ x + c + 72 + d + f + 8 + e = \frac{S}{2} \\ c + 79 + e + f + 10 + d = \frac{S}{2} \\ a + 79 + b + 10 = \frac{S}{2}; \end{cases}$$

per l'ultima di queste si noti semplicemente che AID è un triangolo con base AD e altezza pari alla distanza fra le rette AD e BC, e quindi la sua area è la metà di S (che può essere calcolata anche come $S = AD \cdot h_2$, dove h_2 è l'"altra" altezza, ovvero appunto la distanza fra AD e BC). Sommando a coppie le relazioni nel sistema precedente otteniamo

$$\begin{cases} 2(x + 72 + 8) + a + b + c + d + e + f = S \\ 2(79 + 10) + a + b + c + d + e + f = S, \end{cases}$$

e quindi per differenza $x + 80 = 89$, ovvero $x = 9$.

25 Somma infinita

Dimostreremo per induzione che $b_n = \dfrac{2^{n+1} - n - 2}{2^n} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$. Ammettendo per il momento questo risultato, vediamo che b_n è sempre minore di 2, ma al crescere di n si avvicina arbitrariamente a questo numero (in effetti, il rapporto $\frac{n+2}{2^n}$ può essere reso piccolo a piacere a patto di prendere n sufficientemente grande). In particolare, la somma della serie $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{2^n}$ è 2.

Mostriamo ora la formula per b_n. Essa è evidentemente vera per $n = 1$, per verifica diretta: $b_1 = a_1 = \frac{1}{2} = \frac{2^{1+1}-1-2}{2}$. Ammettendo che sia vera per un certo n, per $n+1$ abbiamo

$$b_{n+1} = b_n + a_{n+1} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+2} - 2n - 4}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+2} - (n+1) - 2}{2^{n+1}},$$

come voluto.

Questa dimostrazione potrebbe però lasciarvi insoddisfatti: d'accordo, è vera, ma non è particolarmente illuminante. Esiste un modo più intuitivo di capire che la somma (infinita) voluta è effettivamente uguale a 2? Le seguenti manipolazioni sono più difficili da giustificare formalmente rispetto ai passaggi precedenti, ma spero possano dare una motivazione intuitiva migliore del risultato. Chiamiamo

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Possiamo allora scrivere

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = 1 + S,$$

da cui $S = 1$, e d'altro canto

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} & + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} & + \frac{1}{32} + \cdots & = & S \\
+ \frac{1}{4} & + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} & + \frac{1}{32} + \cdots & = & \frac{1}{2}S \\
 & + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} & + \frac{1}{32} + \cdots & = & \frac{1}{4}S \\
 & + \frac{1}{16} & + \frac{1}{32} + \cdots & = & \frac{1}{8}S \\
 & & + \frac{1}{32} + \cdots & = & \frac{1}{16}S \\
 & & \vdots & = & \vdots
\end{array}$$

Sommando per colonne troviamo

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \cdots = S\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\right),$$

ovvero la somma voluta è uguale a $S(1+S) = 2$.

4 Soluzioni – Qualche apertura verso la matematica non elementare

1 Il teorema di Liouville discreto

La soluzione di questo problema è in realtà molto semplice: i numeri scritti sul piano sono interi positivi, e ogni insieme di interi positivi ammette un minimo. Guardiamo questo minimo m: per ipotesi, esso è anche uguale alla media dei quattro numeri n_1, n_2, n_3, n_4 ad esso adiacenti, che però (siccome abbiamo preso proprio il minimo assoluto!) sono tutti maggiori o uguali ad m. Si ha allora

$$m = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}{4} \geq \frac{m + m + m + m}{4} = m,$$

per cui si deve avere uguaglianza, ovvero $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = m$. Abbiamo allora dimostrato che tutte le caselle adiacenti ad una casella che contiene m contengono anch'esse il numero m. Siccome passando da una casella ad una casella adiacente raggiungiamo tutte le caselle del piano, questo vuol dire esattamente che ogni casella contiene il numero m.

2 Il problema del ballottaggio

Prima strategia. Vogliamo dimostrare che – data una sequenza ciclica di $a + b$ voti – ci sono esattamente $a - b$ "punti di partenza" che forniscono uno spoglio in cui A è sempre in vantaggio. Questo implica subito il teorema del ballottaggio: supponiamo di sapere la sequenza dei voti scrutinati come sequenza ciclica, ma non il punto di partenza. I punti di partenza sono ovviamente tutti equiprobabili, quindi la probabilità che A sia stata in vantaggio per tutto lo spoglio è $\frac{a-b}{a+b}$. Ma questo è vero qualunque sia la sequenza (ciclica) dei voti scrutinati, quindi *anche se non conosciamo* tale sequenza la probabilità è $\frac{a-b}{a+b}$.

Per dimostrare l'affermazione sulle sequenze cicliche è sufficiente procedere come segue. Diciamo che una sequenza è *buona* se A è sempre in vantaggio.

Dopo aver disposto i voti in cerchio, cominciamo ad eliminare coppie di A, B adiacenti (in quest'ordine se lette in senso orario). Certamente una sequenza buona non può separare questa A da questa B, perché l'unico caso in cui questo succede è se si inizia con la B in questione, il che chiaramente non porta ad una sequenza buona. D'altro canto, visto che questa coppia fornisce un voto ad A ed un voto a B (e quello per A arriva prima), possiamo semplicemente ignorare completamente questi due voti. Procedendo in questo modo, prima o poi avremo eliminato tutte le lettere B, e nel contempo avremo eliminato b delle lettere A. Visto che rimangono solo lettere A, ora tutti i punti di partenza conducono a sequenze buone! E data una sequenza buona costituita dalle A rimanenti, reinserendo le coppie AB che abbiamo eliminato otteniamo una sequenza buona in termini dei voti iniziali. Quindi quello che abbiamo dimostrato è: data una sequenza ciclica con a lettere A e b lettere B, i punti di partenza che forniscono una sequenza buona sono tanti quanti i punti di partenza buoni con $a - b$ lettere A e nessuna lettera B, ovvero sono $a - b$. Questo è proprio quello che volevamo dimostrare.

Seconda strategia. Osserviamo innanzitutto che – come sappiamo dal problema sui cammini della formica – il numero totale di percorsi è $\binom{a+b}{b}$.

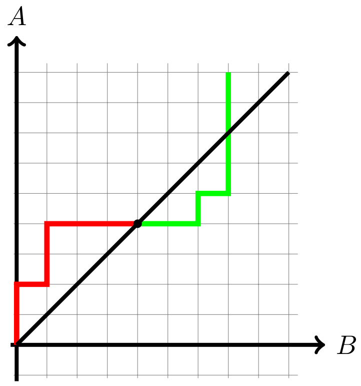
Contiamo ora i percorsi 'cattivi' che iniziano con una mossa verso destra (ovvero un voto per B): restano poi da fare $b - 1$ mosse verso destra e a mosse verso l'alto, dunque applicando nuovamente lo stesso risultato appena usato vediamo che il numero di tali percorsi è $\binom{a+b-1}{a} = \frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!} = \frac{b}{a+b}\binom{a+b}{b}$.

Restano infine da contare i percorsi che iniziano con una mossa verso l'alto (ovvero con un voto per A) ma finiscono per intersecare la diagonale. Il voto che conduce al *primo* pareggio fra le due candidate deve chiaramente essere un voto per B (altrimenti non potrebbe passare dall'essere in vantaggio ad una situazione di pareggio), quindi complessivamente lo spoglio procede come segue:

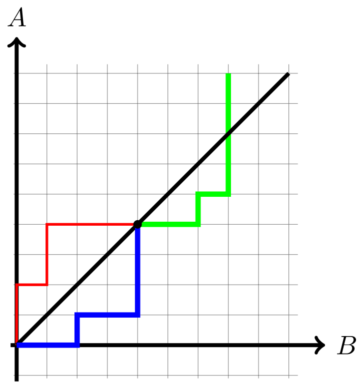
1. inizia con una A;

2. ad un certo punto giunge ad un pareggio fra A e B: diciamo che a questo punto siano stati scrutinati $2k$ voti, di cui k per A e k per B;
3. procede infine con i rimanenti $(a+b)-(2k)$ voti, di cui $a-k$ per A e $b-k$ per B.

In termini di cammini, quindi, abbiamo una situazione simile alla seguente (il ballottaggio in figura è $AABAABBBBBABAAAA$):



Lo spoglio è rappresentato dal cammino rosso e verde: A parte in vantaggio, ma dopo 8 voti c'è una situazione di pareggio. Nei rimanenti voti tuttavia c'è una maggioranza per A, che finisce per vincere il ballottaggio. L'idea è ora quella di associare ad ogni tale percorso un nuovo percorso *che inizi con una mossa verso destra*, in modo tale che l'associazione fra i percorsi "cattivi" che iniziano con una A e i percorsi (automaticamente "cattivi") che iniziano con una B sia una bigezione. L'idea (alla quale abbiamo maldestramente alluso con il termine *riflettendo*) è quella di *riflettere* il primo segmento del voto (dall'inizio fino al primo pareggio), come nella figura seguente:



Il nuovo andamento dello spoglio è ora rappresentato dai segmenti blu e verdi – esplicitamente, il nuovo ordine dei voti è $BBABBAAABBABAAAA$. Un attimo di riflessione mostra che ognuno di questi due grafici si ottiene dall'altro semplicemente riflettendo la parte di cammino che porta al primo pareggio. Ma allora abbiamo mostrato come associare, in maniera biunivoca, un ordinamento dei voti che comprende un pareggio e che inizia con A con un ordinamento dei medesimi voti che inizia con B (e necessariamente comprende un pareggio, perché se B parte in vantaggio ma A finisce per vincere è chiaro che ad un certo punto dovranno pareggiare). Ne segue che i percorsi "cattivi" che iniziano con A sono tanti quanti i percorsi che iniziano per B, ovvero sono nuovamente $\frac{b}{a+b}\binom{a+b}{b}$. Per differenza otteniamo che i percorsi buoni sono

$$\binom{a+b}{b} - 2\frac{b}{a+b}\binom{a+b}{b} = \frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{b}.$$

Dal momento che i percorsi totali sono $\binom{a+b}{b}$, la probabilità che un percorso scelto a caso (ovvero un ordinamento casuale dei voti) veda A sempre in vantaggio è $\frac{a-b}{a+b}$ come voluto.

3 La lotteria del sultano

1. Come suggerito dall'indicazione, la nostra probabilità di vittoria si ottiene sommando le probabilità di vittoria nelle varie situazioni in cui la pallina con il numero più alto esca esattamente come prima, come seconda, come terza..., come ultima, e dove ognuna di queste probabilità va pesata con la probabilità che in effetti la pallina migliore esca come prima, seconda, ..., ultima. Questi 'pesi' sono tutti uguali a $\frac{1}{n}$, perché la pallina migliore ha uguale probabilità di uscire in ogni momento.

   Con la nostra strategia, se la pallina migliore esce fra le prime r siamo fregati, quindi queste situazioni non contribuiscono alla nostra probabilità di vittoria.

   Supponiamo invece che la pallina migliore esca come $(r+1)$-esima: allora certamente la prendiamo! Questo contribuisce quindi $\frac{1}{n}$ alla nostra probabilità di vittoria (è semplicemente la probabilità che la pallina migliore esca come $(r+1)$-esima).

   Per semplicità, chiamiamo p_1 il numero sulla prima pallina estratta, p_2 il numero sulla seconda pallina estratta, e così via.

   Consideriamo ora cosa succede se la pallina migliore esce come $(r+2)$-esima: quand'è che vinciamo? Di sicuro non abbiamo visto niente di meglio finora, quindi – vista la nostra strategia – l'unico caso in cui ci siamo già fermati è quello in cui p_{r+1} è più grande di tutti i numeri $p_1, \ldots, p_r$. In altri termini: perdiamo se $\max\{p_1, \ldots, p_{r+1}\} = p_{r+1}$, e vinciamo altrimenti. Ma il massimo di $p_1, \ldots, p_{r+1}$ ha la medesima probabilità ($= \frac{1}{r+1}$) di essere p_1, di essere p_2, eccetera. Quindi: in r casi su $r+1$ vinciamo, e in un caso perdiamo. Pesando questa situazione per la sua probabilità $\frac{1}{n}$ otteniamo un contributo alla nostra probabilità di vittoria che è dato da

   $$\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{probabilità che la pallina migliore sia la } r+2\text{-esima}} \qquad \times \qquad \underbrace{\frac{r}{r+1}}_{\text{probabilità che } \max\{p_1,\ldots,p_{r+1}\} \text{ sia fra le prime } r \text{ palline}}$$

   Procediamo allo stesso modo per gli altri casi: se la pallina migliore esce in posizione $r+3$, allora vinciamo a meno di non esserci già fermati, e ci siamo già fermati solo se il massimo fra le prime $r+2$ palline è p_{r+1} o p_{r+2} – quindi perdiamo in 2 casi su $r+2$, e vinciamo nei restanti r, da cui un contributo alla nostra probabilità di vittoria totale dato da $\frac{1}{n} \times \frac{r}{r+2}$. Continuando in questo modo, si vede che la probabilità di vittoria totale è

   $$\frac{1}{n} \cdot \frac{r}{r+1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{r+2} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{n-1}$$

   come voluto (ci fermiamo a $\frac{r}{n-1}$ perché se la pallina migliore è estratta come ultima abbiamo r casi favorevoli sulle $n-1$ palline già estratte).

2. Mostriamo per induzione che la differenza $H_{2n} - H_n$ cresce al crescere di n: in effetti si ha

   $$H_{2n+2} - H_{n+1} = H_{2n} - H_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1},$$

   e la quantità $\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{n+1}$ è positiva perché $\frac{1}{2n+2}$ e $\frac{1}{2n+1}$ sono entrambi maggiori o uguali a metà di $\frac{1}{n+1}$. Si ottiene quindi che $H_{2n} - H_n$ è maggiore o uguale a $H_2 - H_1 = \frac{1}{2}$.

3. Basta prendere $r = k+1$: la formula del punto 1 ci dice allora che la nostra probabilità di vittoria è

   $$\frac{k+1}{2k+1}\left(H_{2k} - H_k\right),$$

   che per il punto precedente è almeno $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{k+1}{2k+1} > \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

4 Una curiosa proprietà aritmetica

Per risolvere questo esercizio è, se non necessario, certamente molto utile introdurre la nozione di **congruenza**. Diciamo che due interi a, b sono **congrui** modulo un terzo intero m se m divide la differenza $a - b$; si scrive solitamente $a \equiv b \pmod{m}$. Osserviamo che due numeri sono congrui modulo m se e soltanto se lasciano lo stesso resto nella divisione per m.

Esempi. $17 \equiv 7 \pmod{10}$, $5050 \equiv 721 \cdot 7 + 3 \equiv 3 \pmod{7}$, $21 \equiv 0 \pmod{3}$.

Le seguenti proprietà non sono difficili da verificare (una volta che qualcuno vi dice che sono vere!):

- se si ha $a \equiv b \pmod{m}$ e $a' \equiv b' \pmod{m}$, allora $a + a' \equiv b + b' \pmod{m}$
- similmente, se si ha $a \equiv b \pmod{m}$ e $a' \equiv b' \pmod{m}$, allora $aa' \equiv bb' \pmod{m}$

La relazione di congruenza si comporta dunque, sotto molti punti di vista, come la relazione di uguaglianza. Un punto più sottile, ma fondamentale per la soluzione, è il seguente:

- Siano a ed m due interi fra loro coprimi. Allora esiste quello che si chiama l'**inverso** di a modulo m, ovvero un intero b tale che $ab \equiv 1 \pmod{m}$.

La dimostrazione dell'esistenza dell'inverso segue abbastanza facilmente dalla cosiddetta **identità di Bézout** (a sua volta una conseguenza dell'algoritmo di Euclide per il calcolo del massimo comun divisore): dati due interi coprimi a ed m, esistono interi b e n tali che $ab + mn = 1$. Ma se questo è vero allora si ha anche $ab + mn \equiv 1 \pmod{m}$, perché m divide $(ab + mn) - 1 = 0$, e quindi anche $ab \equiv 1 \pmod{m}$, perché m divide sia $ab + mn - 1$ che mn, e quindi divide la differenza, ovvero $ab - 1$; ma per la nostra definizione di congruenza questo vuole proprio dire $ab \equiv 1 \pmod{m}$.

Questa nozione di inverso permette, almeno in una certa misura, di *dividere* entrambi i lati di una congruenza per uno stesso numero. Questo sarà reso più chiaro – spero! – da un esempio: supponiamo di voler risolvere l'equazione $5x \equiv 4 \pmod{7}$. Siccome 5 e 7 sono coprimi, sappiamo dalla teoria che deve esistere l'inverso di 5 modulo 7: siccome si ha $3 \cdot 5 \equiv 15 \equiv 1 \pmod{7}$, l'inverso di 5 modulo 7 è 3. Per risolvere l'equazione $5x \equiv 4 \pmod{7}$ vorremmo dividere per 5 da entrambi i lati, ma non sappiamo bene cosa questo voglia dire; quello che possiamo fare, però, è moltiplicare entrambi i lati per 3 (l'inverso di 5) per ottenere

$$15x \equiv 4 \cdot 3 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 12 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 5 \pmod{7}.$$

Il primo passaggio è quello cruciale: qualunque valore abbia l'intero x, siccome si ha $15 \equiv 1 \pmod{7}$, si ha anche $15x \equiv x \pmod{7}$.

Abbiamo ora tutti gli strumenti per la soluzione dell'esercizio. Osserviamo che nel testo del problema si introduce un intero b che è semplicemente l'inverso di a modulo $2n$; l'esistenza di b è data come ipotesi nel testo, ma per quanto abbiamo discusso sopra è in effetti implicata dall'ipotesi che a e $2n$ siano coprimi.

Siano $A_1 = \{s \in S_a : 0 \leq s \leq n-1\}$ e $A_2 = \{s \in S_a : n \leq s \leq 2n-1\}$. La somma degli elementi di S_a è uguale alla somma Σ_1 degli elementi di A_1 più la somma Σ_2 degli elementi di A_2.

È facile vedere che ogni classe di resto modulo n è rappresentata una e una sola volta dagli elementi di S, per cui dato $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ abbiamo o $i \in A_1$ o $i + n \in A_2$. Ne segue che $\Sigma_a = \Sigma_1 + \Sigma_2$ è dato dalla somma dei numeri $0, 1, 2, \ldots, n-1$, che è uguale a $\frac{(n-1)n}{2}$, più n volte la cardinalità di A_2. In formule,

$$\Sigma_a = \frac{n(n-1)}{2} + n|A_2|.$$

D'altro canto chiaramente $|A_2| + |A_1| = |S_a| = n$, per cui $|A_2| = n - |A_1| = n - N_a$, e quindi

$$\Sigma_a = \frac{n^2 - n}{2} + n(n - N_a) = \frac{3n^2 - n}{2} - nN_a.$$

Definiamo B_1, B_2 e N_b come sopra, ma relativamente all'insieme B. Ripetendo il ragionamento precedente abbiamo $\Sigma_b = \frac{3n^2-n}{2} - nN_b$, quindi basta dimostrare $N_a = N_b$. Dimostriamo questa uguaglianza stabilendo una bigezione fra gli insiemi A_1 e B_1. Notiamo che a_1 è un elemento di A_1 se e soltanto se esiste un intero i per cui siano verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 1 \leq a_1 \leq n \\ 1 \leq i \leq n \\ a_1 \equiv ai \pmod{2n} \end{cases}$$

Mostriamo che i è un elemento di B_1. In effetti, i appartiene a B_1 se e solo se esiste un intero j per cui

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ i \equiv bj \pmod{2n} \Leftrightarrow ai \equiv j \pmod{2n}, \end{cases}$$

e queste condizioni sono certamente soddisfatte per $j = a_1$. Osserviamo che nello stabilire l'equivalenza $i \equiv bj \pmod{2n} \Leftrightarrow ai \equiv j \pmod{2n}$ si è usato il fatto che $ab \equiv 1 \pmod{2n}$: si passa da una congruenza all'altra moltiplicando entrambi i membri per a o per b rispettivamente. Viceversa, se $b_1 \in B_1$, allora (per qualche intero i) abbiamo

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq b_1 \leq n \\ b_1 \equiv bi \pmod{2n}, \end{cases}$$

e queste sono esattamente le condizioni che garantiscono che i sia un elemento di A_1. In altri termini, la bigezione è data da

$$f: \begin{array}{ccc} A_1 & \to & B_1 \\ ai \bmod 2n & \mapsto & i \end{array}, \qquad g: \begin{array}{ccc} B_1 & \to & A_1 \\ bj \bmod 2n & \mapsto & j \end{array}$$

Esempio. Consideriamo il caso $n = 7, a = 3, b = 5$. I multipli di a che ci interessano sono i seguenti:

i	1	2	3	4	5	6	7
$ai \bmod 2n$	3	6	9	12	1	4	7

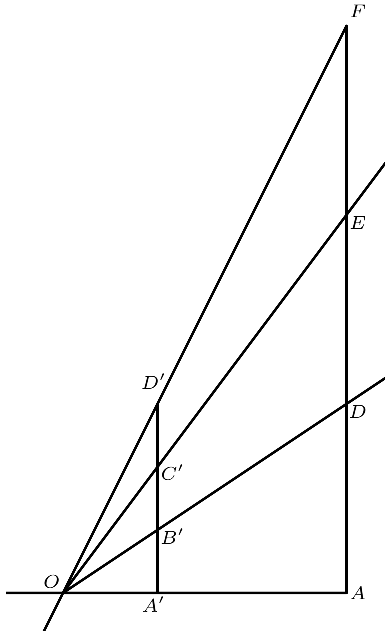
Fra questi, i membri di A_1 sono $3, 6, 1, 4$, in corrispondenza di $i = 1, 2, 5, 6$. Ora consideriamo i multipli di b:

i	1	2	3	4	5	6	7
$bi \bmod 2n$	5	10	1	6	11	2	7

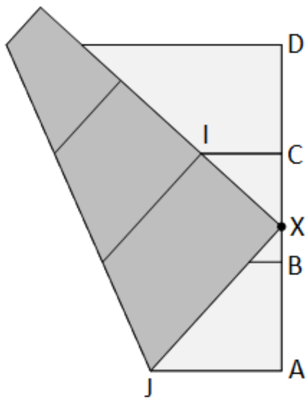
Quelli in B_1 sono esattamente $5, 1, 6, 2$, ovvero i valori di i tali che ai appartiene ad A_1.

5 Origami

Dividere un segmento in tre parti uguali non è difficile, ad esempio usando riga e compasso: costruiamo innanzitutto due segmenti DE ed EF di lunghezza 1 allineati con AD (dapprima usiamo la riga per tracciare la retta AD. Poi, puntando il compasso in D con apertura AD, tracciamo una circonferenza che interseca la retta AD nel punto E. Infine, puntando il compasso in E con apertura ED, tracciamo una circonferenza che interseca la retta AD in F). A questo punto tracciamo le rette AA' e FD', che si intersecheranno in un certo punto O. Per il teorema di Talete, le rette OD e OE intersecano $A'D'$ in due punti che dividono il segmento AD in tre parti uguali (la dimostrazione è simile a quella della seconda parte di questo problema, quindi omettiamo i dettagli).



Veniamo ora al fatto che il rapporto a/b sia uguale a $\sqrt[3]{2}$.



Con riferimento alla figura, siano $a = DX$, $b = XA$ e $c = AJ$. La nostra tesi è $(a/b)^3 = 2$, ovvero $a^3 = 2b^3$. Scriveremo ora alcune relazioni che coinvolgono le quantità a, b, c:

1. Innanzitutto si ha $a+b = AD$, perché l'unione dei segmenti AX e XD è proprio il segmento AD.

2. In secondo luogo, siccome i segmenti XJ e JA costituiscono anch'essi un lato del quadrato (che è stato ripiegato, ma non per questo ha cambiato lunghezza), si ha anche $XJ + c = XJ + JA = AA' = AD$. D'altro canto, il triangolo AJX è rettangolo in A, e quindi per il teorema di Pitagora abbiamo

$$c^2 + b^2 = XJ^2 = (AD - c)^2 = (a + b - c)^2,$$

da cui ricaviamo

$$c^2 + b^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2c(a + b) \Rightarrow c = \frac{a(a + 2b)}{2(a + b)}.$$

3. Il segmento CX può essere ottenuto come $DX - DC = a - \frac{1}{3}AD = a - \frac{1}{3}(a+b) = \frac{2a-b}{3}$. Inoltre, per costruzione, il segmento XI è un terzo del lato del quadrato di partenza, dunque $XI = \frac{1}{3}(a+b)$.

4. Resta solo da osservare che i triangoli CXI e AJX sono simili: in effetti gli angoli in C ed in A sono retti, mentre

$$\widehat{CXI} = 180° - 90° - \widehat{JXA} = 90° - \widehat{JXA} = \widehat{AJX},$$

per cui questi due triangoli hanno due angoli uguali, e quindi sono simili. La similitudine implica

$$\frac{CX}{XI} = \frac{AJ}{JX},$$

che per quanto già osservato si riscrive come

$$\frac{(2a-b)/3}{(a+b)/3} = \frac{c}{a+b-c} = \frac{\frac{a(a+2b)}{2(a+b)}}{a+b-\frac{a(a+2b)}{2(a+b)}}$$

Ora si tratta solo di fare qualche calcolo. Semplifichiamo la prima e ultima frazione moltiplicando sopra e sotto per 3 (rispettivamente per $2(a+b)$), ottenendo

$$\frac{2a-b}{a+b} = \frac{a(a+2b)}{2(a+b)^2 - a(a+2b)}$$

da cui, moltiplicando entrambi i membri per $(a+b)(2(a+b)^2 - a(a+2b))$, abbiamo

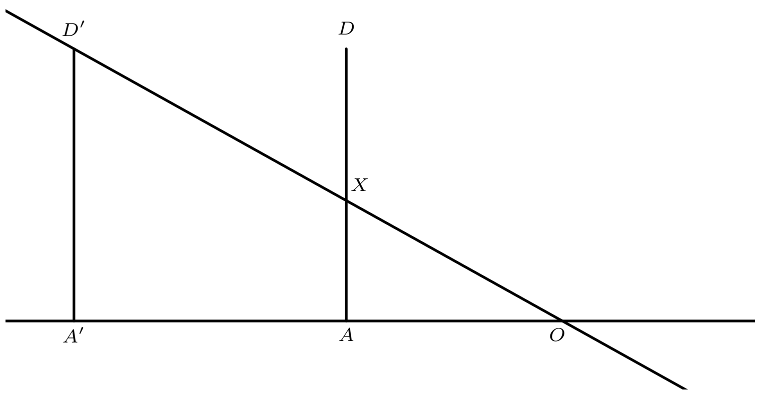
$$(2a-b)(2(a+b)^2 - a(a+2b)) = a(a+2b)(a+b);$$

prendendo coraggio e sviluppando otteniamo

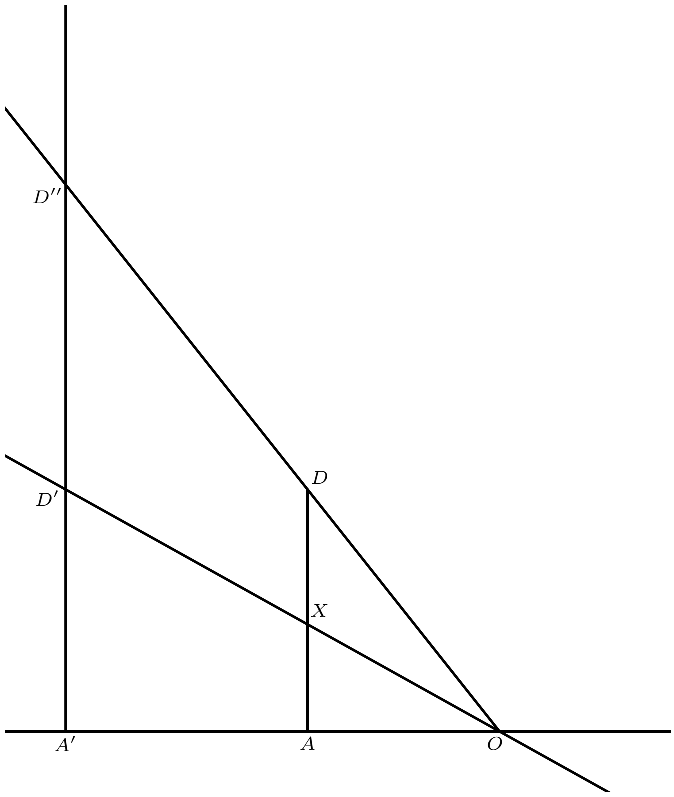
$$2a^3 + 3a^2b + 2ab^2 - 2b^3 = a^3 + 2ab^2 + 3a^2b \Leftrightarrow a^3 = 2b^3$$

come voluto.

Per la seconda parte descriviamo la costruzione sulla medesima figura usata finora, ma una semplice variante funzionerebbe per qualunque coppia di rette parallele, con un segmento di lunghezza 1 segnato sulla prima e due segmenti di rapporto $\sqrt[3]{2}$ segnati sulla seconda. Tracciamo intanto la retta $A'A$ e la retta $D'X$, che si incontreranno in un certo punto O:



Tracciamo quindi la retta passante per O e D e intersechiamola con il prolungamento della retta $A'D'$, ottenendo il punto D'':



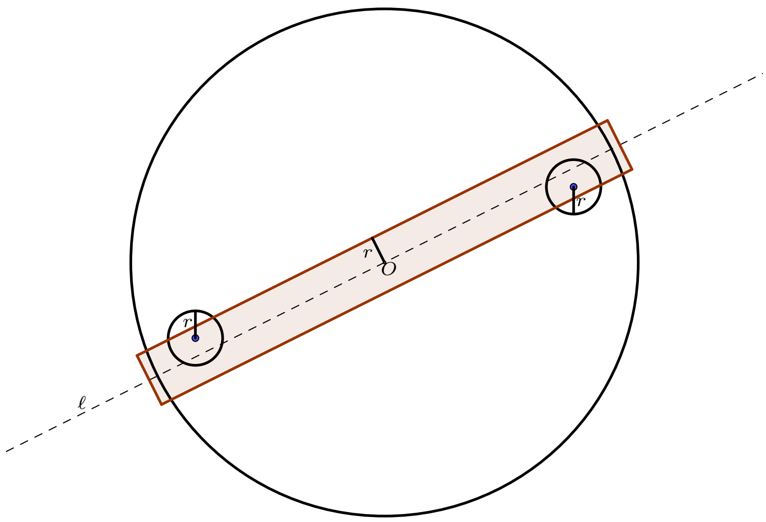
Siccome le rette AD e $A'D'$ sono parallele, il teorema di Talete assicura che i rapporti $D''A'/D'A'$ e DA/XA sono uguali. Siccome il segmento $D'A'$ ha lunghezza 1 per ipotesi e il rapporto $\frac{DA}{XA}$ è $\sqrt[3]{2}$ per la prima parte del problema, otteniamo che $D''A' = D'A' \cdot \frac{DA}{XA} = \sqrt[3]{2}$ come voluto.

6 Il giardino di Minkowski

1. Disegniamo sul piano cartesiano la griglia quadrata formata dalle rette (orizzontali e verticali) passanti per i punti a coordinate intere. In questo modo il piano è suddiviso in tanti quadrati 1×1. Tagliamo ora il piano in tutti questi quadrati (alcuni dei quali conterranno parti dell'insieme M – possiamo pensarli come pezzi di un gigantesco puzzle) e immaginiamo di sovrapporli uno all'altro in un'enorme pila. Siccome l'area di M è maggiore di 1, mentre l'area del quadrato è 1, quando consideriamo questa pila di quadrati ci saranno due punti di M che si trovano uno sopra l'altro (altrimenti avremmo tagliato l'insieme M in pezzi che coprono al massimo un quadrato 1×1, contraddicendo l'ipotesi che l'area di M sia strettamente maggiore di 1). Siano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) due punti di M che si vanno a sovrapporre quando facciamo l'operazione descritta: un attimo di riflessione rivela che questo vuol dire esattamente che $x_1 - x_2$ e $y_1 - y_2$ sono interi, come voluto.

2. Applicando il punto precedente all'insieme $\frac{1}{2}M$ scopriamo che esistono (x_1, y_1) e (x_2, y_2) in $\frac{1}{2}M$ tali che $x_1 - x_2, y_1 - y_2$ siano interi. Detto altrimenti, esistono due punti (a_1, b_1) e (a_2, b_2) in M tali che $\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2$ e $\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2$ siano interi. Siccome M è simmetrico e contiene (a_2, b_2), sappiamo che contiene anche il punto $(-a_2, -b_2)$. Inoltre, siccome M è convesso, contiene anche il punto medio fra (a_1, b_1) e $(-a_2, -b_2)$, che ha coordinate $\left(\frac{a_1-a_2}{2}, \frac{b_1-b_2}{2}\right)$. Per quanto già visto queste coordinate sono intere, come voluto.

3. Consideriamo una qualsiasi retta ℓ passante per l'origine. Fissiamo un $\varepsilon > 0$ molto piccolo (che sarà precisato dopo) e costruiamo un rettangolo R di lati $2r$ e $\frac{2}{r} + 2\varepsilon$, con il lato lungo $2r$ perpendicolare ad ℓ, e che abbia la retta ℓ come asse di simmetria (vedere figura).



L'area del rettangolo è $4 + 4\varepsilon r > 4$, quindi per il teorema di Minkowski R contiene un punto (x, y) a coordinate intere diverso da $(0, 0)$. Quanto è lontano (x, y) dall'origine? Beh, al massimo tanto quanto la semi-diagonale del rettangolo, ovvero al massimo $r^2 + \left(\frac{1}{r} + \varepsilon\right)^2 < r^2 + (50 + \varepsilon)^2$. Ora chiaramente $r < 1$ (altrimenti il gazebo starebbe *dentro* uno degli alberi!), quindi a patto di scegliere ε estremamente piccolo possiamo essere sicuri che $x^2 + y^2 \leq r^2 + (50 + \varepsilon)^2 < 50^2 + 1$. Ma d'altro canto $x^2 + y^2$ è un intero, quindi $x^2 + y^2 \leq 50^2$, e quindi in (x, y) è piantato un albero! Siccome il lato corto del rettangolo è $2r$, è immediato rendersi conto che – siccome (x, y) è contenuto in R – il cerchio di centro (x, y) e raggio r interseca la retta ℓ. Nella nostra analogia, questo vuol dire che guardando lungo la direzione ℓ il nostro sguardo incrocia un albero!

Per chi fosse preoccupato del fatto che l'albero che abbiamo trovato blocca la visuale solo lungo una delle due 'direzioni' di visuale lungo ℓ, basta osservare che l'albero piantato in $(-x, -y)$ blocca la visuale nella direzione opposta.

7 Le funzioni binomiali

1. Possiamo calcolare

$$\begin{aligned}
\binom{x+1}{m+1} - \binom{x}{m+1} &= \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)}{(m+1)!} - \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-m)}{(m+1)!} \\
&= \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)}{(m+1)!}\left((x+1)-(x-m)\right) \\
&= \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)}{(m+1)!}(m+1) \\
&= \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)}{m!} \\
&= \binom{x}{m},
\end{aligned}$$

dove nel passaggio dalla prima alla seconda riga abbiamo effettuato un raccoglimento a fattore comune e nella penultima uguaglianza abbiamo sfruttato l'uguaglianza $(m+1)! = (m+1) \cdot m!$.

2. Chiamiamo $p_0(x) = \binom{x}{0} = 1$, $p_1(x) = \binom{x}{1} = x$, $p_2(x) = \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$, $p_3(x) = \binom{x}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$ e $p_4(x) = \binom{x}{4} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$ le prime funzioni binomiali. Allora $(x+1)^2 =$

$x^2 + 2x + 1 = 2p_2(x) + 3p_1(x) + p_0(x)$. Ora noi vorremmo trovare un'espressione $p(x)$ tale che $p(x+1) - p(x) = x^2 + 2x + 1 = 2p_2(x) + 3p_1(x) + p_0(x)$. Ma sappiamo che vale $p_3(x+1) - p_3(x) = p_2(x)$, e abbiamo formule simili per $p_2(x), p_1(x)$, per cui abbiamo un candidato naturale:

$$p(x) = 2p_3(x) + 3p_2(x) + p_1(x) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6},$$

che *per come è stato costruito* rispetta $p(x+1) - p(x) = (x+1)^2$. Ma d'altro canto $p(1) = 1$, e quindi per induzione otteniamo immediatamente che $p(n)$ è la somma dei primi n quadrati (in effetti è vero per $n = 1$, e d'altro canto $p(n+1) = p(n) + (n+1)^2$: se $p(n)$ è la somma dei primi n quadrati, questa formula mostra che $p(n+1)$ è la somma dei primi $n+1$ quadrati).

Nel caso della somma dei cubi possiamo ragionare in modo del tutto analogo: si trova facilmente $(x+1)^3 = 6p_3 + 12p_2 + 7p_1 + p_0$, da cui "indoviniamo" che la somma dei cubi dei primi n interi positivi è data da $6p_4(n) + 12p_3(n) + 7p_2(n) + p_1(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3. Procediamo per induzione sul grado. Se $q(x)$ è un polinomio di grado 1, ovvero $q(x) = ax+b$, e per ogni valore intero di x anche $q(x)$ è intero, allora sia $b = q(0)$ che $a+b = q(1)$ sono interi, da cui sia a che b sono interi. Questo dimostra il passo base dell'induzione. Consideriamo ora un generico polinomio $q(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_0$ con la proprietà del testo e di grado $d \geq 2$. Definiamo $r(x) = q(x+1) - q(x)$. Allora anche il polinomio $r(x)$ ha la proprietà del testo: se x è intero (e quindi anche $x+1$ lo è), allora per ipotesi $q(x)$ e $q(x+1)$ sono interi, e quindi $r(x) = q(x+1) - q(x)$ è intero. Ma qual è il termine di grado massimo di $r(x)$? Affermiamo che è $d \cdot a_d \cdot x^{d-1}$. Consideriamo infatti $q(x+1) - q(x)$, ignorando però tutti i termini di grado x^{d-2} o inferiori. Otteniamo allora

$$\begin{aligned} q(x+1) - q(x) &= a_d(x+1)^d + a_{d-1}(x+1)^{d-1} - a_d x^d - a_{d-1}x^{d-1} + \text{ termini di grado} \leq d-2 \\ &= a_d(x^d + dx^{d-1}) + a_{d-1}x^{d-1} - a_d x^d - a_{d-1}x^{d-1} + \text{ termini di grado} \leq d-2 \\ &= da_d x^{d-1} + \text{ termini di grado} \leq d-2, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato lo sviluppo del binomio di Newton:

$$(x+1)^d = x^d + dx^{d-1} + \text{ termini di grado} \leq d-2,$$

e similmente per $(x+1)^{d-1}$. Questo dimostra l'affermazione sul termine di grado massimo di $r(x)$. D'altro canto, abbiamo già visto che $r(x)$ è un polinomio che assume valori interi per valori interi di x, e il suo grado è $d-1$, quindi per ipotesi induttiva sappiamo che il *suo* coefficiente di grado massimo, moltiplicato per $(d-1)!$, è intero. Otteniamo allora che $(d-1)! \cdot d \cdot a_d$ è intero, cioè che $d! \cdot a_d$ è intero come voluto.