

PROGRAMMA PRELIMINARE DI ALGEBRA 1 2014-2015

(Ilaria DEL CORSO)

Gruppi e sottogruppi, classi laterali, sottogruppi normali e gruppi quoziente. Sottogruppo generato da un sottoinsieme. Omomorfismi e isomorfismi. Primo teorema di omomorfismo per gruppi. Corrispondenza fra sottogruppi indotta da un omomorfismo.

Il gruppo degli automorfismi.
Automorfismi interni. Prodotti diretti e prodotti semidiretti di gruppi. Azioni di un gruppo su un insieme. Classi di coniugio. Formula delle classi, applicazioni ai p -gruppi e teorema di Cauchy.

I teoremi di Sylow.

Gruppi di permutazioni. Classi di coniugio nel gruppo di permutazioni su n elementi.

Teorema di struttura per i gruppi abeliani finiti.

Anelli e sottoanelli, corpi e campi. Anelli commutativi, domini d'integrità e divisori dello zero. Il gruppo delle unità di un anello. Ideali e anelli quoziente. Ideale generato da un sottoinsieme. Operazioni sugli ideali. Omomorfismi tra anelli e teorema di omomorfismo.

Campo dei quozienti di un dominio d'integrità.

Anelli euclidei, anelli a ideali principali e anelli a fattorizzazione unica.

L'anello dei polinomi. Lemma di Gauss e fattorizzazione unica dei polinomi a coefficienti in un anello a fattorizzazione unica.

Estensioni di campi. Estensioni finite ed estensioni algebriche. Chiusura algebrica di un campo: esistenza ed unicità. Estensioni normali, gruppi di Galois e corrispondenza di Galois. Calcolo di gruppi di Galois. Cenni sulla risolubilità per radicali e sulle costruzioni con riga e compasso.

TESTI DI RIFERIMENTO:

N. Herstein, Algebra, Editori Riuniti.
P. Di Martino, Algebra, Edizioni PLUS, Università di Pisa.
M. Artin, Algebra, Bollati Boringhieri
S. Lang, Undergraduate Algebra (2 Ed.), Springer-Verlag.
A. Machi, Gruppi, UNITEXT Springer.
S. Gabelli, Teoria delle equazioni e teoria di Galois, UNITEXT Springer.

Algebra II
P. Gianni
Programma Preliminare AA 2014-2015

Anelli e ideali. Anelli e ideali. Anelli a ideali principali e a fattorizzazione unica. Operazioni su ideali di un anello commutativo unitario: somma, prodotto, intersezione, radicale. Ideali coprimi, ideale quoziente, annullatore. Ideali primi, massimali, irriducibili. Nilradicale e radicale di Jacobson. Estensioni e contrazioni di ideali. Prodotto e somma diretta di anelli. Teorema cinese del resto. Interpolazione di Lagrange. L'anello dei polinomi $A[x]$ e i suoi ideali. $\text{Spec } \mathbb{Z}[x]$.

Polinomi in piu' variabili. Ordinamenti monomiali. Algoritmo di divisione per polinomi in $K[x_1, \dots, x_n]$. Monoideali. Frontiera di un monoideale. Lemma di Dickson. Ideali monomiali : caratterizzazione degli ideali monomiali irriducibili, radicali, primi e primari.

Basi di Gröbner. Algoritmo di Buchberger. Proprieta' di eliminazione dell'ordinamento lessicografico. Il risultante. Teoremi di estensione. Teorema degli zeri di Hilbert. Corrispondenza ideali varietati' affini. Ideali zero dimensionali e basi di Gröbner.

Moduli. Moduli su un anello commutativo unitario. Sottomoduli e quozienti. Omomorfismi di moduli. Somma diretta e prodotto diretto di moduli. Moduli liberi, rango. Moduli finitamente generati. Teorema di Hamilton-Cayley. Lemma di Nakayama . Moduli su PID e loro struttura: forma normale di Smith e di Hermite.

Successioni esatte. Successioni di A-moduli e di omomorfismi di A-moduli. I funtori $\text{Hom}(-, N)$ e $\text{Hom}(M, -)$. Successioni che spezzano. Moduli proiettivi. Prodotto tensoriale. Proprieta' del funtore T_N , moduli piatti. Estensione e restrizione di scalari.

Anelli locali e semilocali. Anello delle frazioni e localizzazione di anelli e moduli, ideali degli anelli localizzati, contrazione ed estensione, localizzazioni successive, commutativita' della localizzazione rispetto al passaggio al quoziente. Esattezza del funtore S^{-1} . $S^{-1}A$ e' un A-modulo piatto. Proprieta' locali.

Anelli e moduli noetheriani. Teorema della base di Hilbert. Ideali irriducibili e primari, decomposizione di un ideale come intersezione di ideali primari. Anelli e moduli artiniani. Dimensione di un anello.

Testi consigliati

- M. F. Atiyah, I.G. Macdonald, “Introduzione all’Algebra Commutativa”, trad. di P. Maroscia, Feltrinelli, Milano, 1981.
- H. Matsumura, “Commutative Ring Theory”, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
- D.Eisenbud, “Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry”, Graduate Texts in Math., Vol.150, Springer-Verlag, 1994
- M.Reid, “Undergraduate Commutative Algebra”, LMS student series,- CUP1995
- D.Cox, J.Little, D.O’Shea, “Ideals, Varieties and Algorithms”. Springer-Verlag, 1992.

Modalita’ d’esame: L’esame consiste in una prova scritta e una prova orale.

PROGRAMMA DI "ALGORITMI E STRUTTURE DEI DATI" AA039

A.A. 2014/2015

Prof. Roberto Grossi

<http://tinyurl.com/asdmatpi>

Problemi computazionali. Indecibilità di problemi computazionali - Trattabilità di problemi computazionali (rappresentazione e dimensione dei dati, algoritmi polinomiali ed esponenziali) - Problemi NP-completi - Modello RAM e complessità computazionale.

Sequenze: array. Sequenze lineari: modalità di accesso e allocazione della memoria, array di dimensione variabile - Opus: scheduling della CPU (ordinamento per selezione e per inserimento) - Complessità di problemi computazionali (limiti superiori e inferiori) - Ricerca di una chiave (ricerca binaria) - Ricorsione e paradigma del divide et impera (moltiplicazione veloce di numeri, ordinamento per fusione, ordinamento e selezione per distribuzione) - Alternativa al teorema fondamentale delle ricorrenze - Opus: array a più dimensioni e matrici nella grafica (moltiplicazione veloce, sequenza ottima di moltiplicazioni) - Paradigma della programmazione dinamica (sottosequenza comune più lunga, partizione di un insieme di interi, problema della bisaccia, pseudo-polinomialità).

Sequenze: liste. Liste (ricerca, inserimento e cancellazione, liste doppie e liste circolari) - Opus: problema dei matrimoni stabili - Liste randomizzate. - Liste ad auto-organizzazione -

Tecniche di analisi ammortizzata.

Alberi. Alberi binari (algoritmi ricorsivi, inserimento e cancellazione) - Opus: minimo antenato comune - Visita per ampiezza: rappresentazione implicita e succinta (rank, select, limite inferiore sullo spazio) - Alberi cardinali, alberi ordinali e parentesi bilanciate.

Dizionari. Liste doppie - Tabelle hash - Alberi binari di ricerca (AVL) - Opus: trie, ricerca testuale e ordinamento di suffissi.

Grafi. Grafi (alcuni problemi, rappresentazione, cammini minimi e chiusura transitiva mediante moltiplicazione di matrici) - Opus: colorazione di grafi (assegnazione delle lunghezze d'onda e grafi a intervalli).

Pile e code. Pile (implementazione mediante array e mediante riferimenti) - Code (implementazione mediante array e mediante riferimenti) - Opus: visite di grafi (ampiezza, profondità) - Grafi diretti aciclici e ordinamento topologico.

Code con priorità. Code con priorità (heap e ordinamento heapsort).

NP-completezza. Definizione delle classi P, NP, NPC - Riduzioni polinomiali. Algoritmi di approssimazione.

Corso: Analisi in $\mathbb{C}$ e Variabili 2

Docente: Luigi Carlo Berselli

Programma del corso:

Spazi L^p : Disuguaglianze di Jensen, Hölder e di Minkowski. Completezza. Prodotto di convoluzione. Approssimazione e regolarizzazione per convoluzione delle funzioni in L^p .

Spazi di Hilbert: basi, sistemi ortonormali completi
Rappresentazione di un elemento dello spazio in termini di una base.
Esistenza della proiezione su un sottospazio chiuso e Teorema di Riesz. Cenni agli spazi di Hilbert sul campo complesso.

Serie di Fourier ed applicazioni: Le funzioni esponenziali formano una base di Hilbert di $L^2(-\pi, \pi)$. Convergenza della serie di Fourier in L^2 . Serie in seni e coseni (serie di Fourier reale). Convergenza uniforme per le funzioni regolari. Regolarità della funzione e comportamento asintotico dei coefficienti. Derivazione dell'equazione del calore e delle onde. Soluzione dell'equazione del calore e delle onde tramite serie di Fourier. Basi ortonormali e autovettori di operatori autoaggiunti.

Trasformata di Fourier e applicazioni. Trasformata di Fourier per funzioni in L^1 . Proprietà elementari della trasformata di Fourier. Formula di inversione e teorema di Plancherel. Trasformata di Fourier per funzioni in L^2 . Applicazioni della Trasformata di Fourier.

Funzioni armoniche: Soluzioni dell'equazione di Laplace. Caratterizzazione in termini di proprietà della media. Principio del massimo e unicità della soluzione dell'equazione di Laplace con dato al bordo assegnato. Risoluzione dell'equazione di Laplace nel disco unitario tramite serie di Fourier.

Cenni all'integrazione su superfici. Superfici senza bordo di dimensione d e classe C^k in $\mathbb{R}^n$. Teorema di Stokes. Forme chiuse e forme esatte. Casi particolari del teorema di Stokes: il teorema di Gauss-Green e il teorema della divergenza.

Testi di riferimento. Il corso non segue alcun testo preciso, ma i contenuti (nonostante la presentazione proposta a lezione potrà differire) si trovano per esempio in

[1] W. Rudin: Real and Complex Analysis. McGraw-Hill 1974 (traduzione italiana: Analisi reale e complessa, Boringhieri, 1974).

[2] W.H. Fleming: Functions of several variables. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1977.

[3] R. Courant e F. John: Introduction to Calculus and Analysis. Volume 2. Interscience Publishers, John Wiley Sons, 1974.

=====

Corso: Analisi Matematica 1
Crediti: 15
Docente: Massimo Gobbino

=====

PRELIMINARI. Principio di induzione. Binomio di Newton. Insiemi e funzioni tra insiemi. Insiemi numerici e funzioni elementari. Numeri reali. Massimo, minimo, estremo inferiore e superiore.

LIMITI. Limite di una successione di numeri reali. Teoremi sui limiti di successioni. Successioni monotone. Numero di Nepero. Sottosuccessioni. Limite di funzioni e relativi teoremi. Limiti notevoli di funzioni. Confronto di ordini di infinitesimo e di infinito. Liminf, limsup, maxlim, minlim per successioni e funzioni. Successioni di Cauchy e completezza dei numeri reali. Successioni definite per ricorrenza.

CONTINUITA' IN UNA VARIABILE. Definizione di funzione continua e continuità delle funzioni elementari. Teoremi sulle funzioni continue. Teorema di esistenza degli zeri e dei valori intermedi. Funzioni semicontinue. Compattezza e teorema di Weierstrass. Funzioni uniformemente continue e moduli di continuità. Teoremi sulle funzioni uniformemente continue.

CALCOLO DIFFERENZIALE IN UNA VARIABILE. Derivata e differenziale e loro interpretazione geometrica. Derivata delle funzioni elementari. Derivate di ordine superiore. Teoremi sulle funzioni derivabili. Massimi e minimi. Teorema di de l'Hopital. Formula di Taylor. Funzioni convesse. Studio di funzioni, locale e globale.

CALCOLO INTEGRALE IN UNA VARIABILE. Definizione di integrale di Riemann e suo significato geometrico. Proprietà dell'integrale e teoremi sulle funzioni integrabili. Funzione integrale. Primitive e tecniche di integrazione. Integrali impropri e relativi criteri di convergenza.

SERIE. Definizione di serie numerica. Condizione necessaria per la convergenza di una serie. Serie geometrica e serie armonica. Criteri per lo studio della convergenza di serie numeriche.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI. Terminologia. Problema di Cauchy. Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili e lineari. Equazioni lineari a coefficienti costanti di ordine n omogenee e non omogenee.

=====

MATERIALE DIDATTICO.

Gli argomenti del corso riguardano conoscenze matematiche stabilizzate da secoli. Qualunque libro sul quale ci si trovi bene e' adeguato!

Le lezioni e altro materiale didattico saranno resi disponibili nell'archivio didattico della home page del docente, dove si potranno trovare ulteriori informazioni sul corso.

=====

Corsi A.A. 2014-2015
PROGRAMMA del CORSO
di ANALISI Matematica 2 , Laurea in Matematica
12 cfu, 120 ore
Vladimir Georgiev (90 ore) e Nicola Visciglia (30 ore)
Sito del corso:

http://www.dm.unipi.it/~georgiev/didattica/annoattuale/14_15_AnalisiMat2.htm

Piataforma moogole E-learning: <https://www.dm.unipi.it/elearning/>

Programma di base:

1) Richiami sulla topologia sulla retta reale e in R^n . Norma (euclidea) in R^n . Richiami su spazi di Banach. Definizione di spazi metrici (completi). Esempi: $C[a, b]$, $C(R)$, $C^k(R)$, $C^\infty(R)$. Insiemi aperti ed insiemi chiusi . Insiemi limitati. Punti di accumulazione. Punti interni, esterni e della chiusura. Insiemi compatti. Teorema di Bolzano – Weierstrass in R^n . Teorema di Heine – Borel in R^n . Insiemi connessi. Riferimento: [Cecconi, Stampacchia, Analisi Matematica 2 volume, Funzioni di più variabili, Liguori Editore, 1986]

2) Limiti e continuità' delle funzioni di più variabili. Controimmagini degli insiemi aperti e chiusi con funzioni continue. Immagine di un connesso, di un compatto, teorema di Weierstrass (la funzione continua in un compatto ammette massimo e minimo). Equivalenza delle norme in R^n .

3) Continuità e differenziabilità di una funzione di più variabili, derivate parziali, gradiente, rotore e derivata direzionale. Simboli di Landau o ed O in R^n . Funzioni omogenei e teorema di Eulero.

4) Derivate delle funzioni di più variabili. Formula di Taylor. Massimi e minimi locali. Massimi e minimi vincolati.

5) Contrazioni. Teorema di Cauchy di esistenza e unicità per sistemi di equazioni ordinari. Prolungamento delle soluzioni. Primi integrali. Sistemi lineari omogenei.(matrice Wronskiana). Sistemi lineari nonomogenei. Punti stazionari per un sistema autonoma. Classificazione di punti stazionari per sistemi (2 x 2). Idea della stabilità delle soluzioni. Riferimento: [Cecconi, Stampacchia, Analisi Matematica 2 volume, Funzioni di più variabili, Liguori Editore, 1986] e [P.Acquistapace, Lezioni di Analisi Matematica 2, <http://www.dm.unipi.it/~acquistp/>]

6) Somme di Riemann e integrale doppio di Riemann su domini normali, formula di riduzione. Integrali tripli, formula di riduzione. Cambiamento di variabili in integrali doppi e tripli. Riferimento [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.]

7) Integrali curvilinei (del I e del II tipo). Forme differenziali lineari. Superfici e integrali di superfici (del I e del II tipo). Riferimento [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.]

8) Teoremi di Gauss – Green e di Stokes. Forme differenziali. Riferimento [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.]

9) Integrale di Lebesgue (in R^n). Misura degli aperti e dei compatti. Subadittività finita sugli aperti. Superadittività sui compatti. Misura esterna e misura interna. Insiemi misurabili limitati. Adittività numerabile sugli insiemi misurabili. Funzioni misurabili. L'integrale di Lebesgue. I teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Confronto con l'integrale di Riemann. Teorema di Fubini. Riferimenti: [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.], [E.Stein, R.Shakarchi, Princeton Lectures in Analysis, III Real Analysis]

10) Spazi $l^2, l^p, L^p(R)$. Riferimenti: [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996], [E.Stein, R.Shakarchi, Princeton Lectures in Analysis, III Real Analysis]

Punti aggiuntivi:

11) Teoremi di Ascoli – Arzelà in $C[a, b]$. Teorema di Stone-Weierstrass (approssimazione con polinomi). Idea della convoluzione. Riferimento: [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.]

12) Serie di Fourier. Identità di Parseval e teoremi di convergenza.

13) Teorema di Peano.

14) Il teorema della funzione inversa, il teorema della funzione implicita, il teorema del rango.

15) Funzione analitiche e formula di Cauchy. Calcolo di integrali impropri usando la formula di Cauchy.

Testi consigliati:

Per lezioni:

- J.P.Cecconi, G.Stampacchia, Analisi Matematica 2 volume, Funzioni di più variabili, Liguori Editore, 1986
- E.Giusti, Analisi Matematica 2, Bollati Boringhieri, 1989.
- N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996
- P.Acquistapace, Lezioni di Analisi Matematica 2, <http://www.dm.unipi.it/~acquistap/>

Per approfondire alcuni temi si possono usare anche:

- W.Rudin, Principi di Analisi Matematica, McGraw Hill Libri Italia SRL, 1991.
- M. Giaquinta, G. Modica, Mathematical Analysis An Introduction to Functions of Several Variables Birkhäuser, 2009.
- A. W. Knap, Basic Real Analysis, Along with a companion volume Advanced Real Analysis, Birkhäuser, 2005
- E.Stein, R.Shakarchi, Princeton Lectures in Analysis, III Real Analysis:, Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces, Princeton Univ. Press, 2005

Libri per esercitazioni:

- E. Giusti, Esercizi e complementi di Analisi Matematica, volume secondo, Bollati Boringhieri, 1994.
- J.P.Cecconi, L.C.Piccinini, G.Stampacchia, Esercizi e problemi di Analisi Matematica, 2 volume, Funzioni di più variabili, Liguori Editore, 1986

Per problemi con difficoltà più elevata:

- E. Acerbi; L. Modica; S. Spagnolo, Problemi scelti di analisi matematica II, Liguori Editore 1986.
- G.Polya, G. Szegő, Problems and Theorems in Analysis II: Theory of Functions. Zeros. Polynomials. Determinants. Number Theory. Geometry (Classics in Mathematics), Springer, 2004.
- Paulo Ney de Souza, Jorge-Nuno Silva, Berkeley Problems in Mathematics, Third Edition, Springer, 2004

Corsi A.A. 2014-2015
PROGRAMMA del CORSO
di ANALISI Matematica 2 , Laurea in Matematica
12 cfu, 120 ore
Vladimir Georgiev (90 ore) e Nicola Visciglia (30 ore)
Sito del corso:

http://www.dm.unipi.it/~georgiev/didattica/annoattuale/14_15_AnalisiMat2.htm

Piataforma moogole E-learning: <https://www.dm.unipi.it/elearning/>

Programma di base:

1) Richiami sulla topologia sulla retta reale e in R^n . Norma (euclidea) in R^n . Richiami su spazi di Banach. Definizione di spazi metrici (completi). Esempi: $C[a, b]$, $C(R)$, $C^k(R)$, $C^\infty(R)$. Insiemi aperti ed insiemi chiusi . Insiemi limitati. Punti di accumulazione. Punti interni, esterni e della chiusura. Insiemi compatti. Teorema di Bolzano – Weierstrass in R^n . Teorema di Heine – Borel in R^n . Insiemi connessi. Riferimento: [Cecconi, Stampacchia, Analisi Matematica 2 volume, Funzioni di più variabili, Liguori Editore, 1986]

2) Limiti e continuità' delle funzioni di più variabili. Controimmagini degli insiemi aperti e chiusi con funzioni continue. Immagine di un connesso, di un compatto, teorema di Weierstrass (la funzione continua in un compatto ammette massimo e minimo). Equivalenza delle norme in R^n .

3) Continuità e differenziabilità di una funzione di più variabili, derivate parziali, gradiente, rotore e derivata direzionale. Simboli di Landau o ed O in R^n . Funzioni omogenei e teorema di Eulero.

4) Derivate delle funzioni di più variabili. Formula di Taylor. Massimi e minimi locali. Massimi e minimi vincolati.

5) Contrazioni. Teorema di Cauchy di esistenza e unicità per sistemi di equazioni ordinari. Prolungamento delle soluzioni. Primi integrali. Sistemi lineari omogenei.(matrice Wronskiana). Sistemi lineari nonomogenei. Punti stazionari per un sistema autonoma. Classificazione di punti stazionari per sistemi (2 x 2). Idea della stabilità delle soluzioni. Riferimento: [Cecconi, Stampacchia, Analisi Matematica 2 volume, Funzioni di più variabili, Liguori Editore, 1986] e [P.Acquistapace, Lezioni di Analisi Matematica 2, <http://www.dm.unipi.it/~acquistp/>]

6) Somme di Riemann e integrale doppio di Riemann su domini normali, formula di riduzione. Integrali tripli, formula di riduzione. Cambiamento di variabili in integrali doppi e tripli. Riferimento [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.]

7) Integrali curvilinei (del I e del II tipo). Forme differenziali lineari. Superfici e integrali di superfici (del I e del II tipo). Riferimento [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.]

8) Teoremi di Gauss – Green e di Stokes. Forme differenziali. Riferimento [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.]

9) Integrale di Lebesgue (in R^n). Misura degli aperti e dei compatti. Subadittività finita sugli aperti. Superadittività sui compatti. Misura esterna e misura interna. Insiemi misurabili limitati. Adittività numerabile sugli insiemi misurabili. Funzioni misurabili. L'integrale di Lebesgue. I teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Confronto con l'integrale di Riemann. Teorema di Fubini. Riferimenti: [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.], [E.Stein, R.Shakarchi, Princeton Lectures in Analysis, III Real Analysis]

10) Spazi $l^2, l^p, L^p(R)$. Riferimenti: [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996], [E.Stein, R.Shakarchi, Princeton Lectures in Analysis, III Real Analysis]

Punti aggiuntivi:

11) Teoremi di Ascoli – Arzelà in $C[a, b]$. Teorema di Stone-Weierstrass (approssimazione con polinomi). Idea della convoluzione. Riferimento: [N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996.]

12) Serie di Fourier. Identità di Parseval e teoremi di convergenza.

13) Teorema di Peano.

14) Il teorema della funzione inversa, il teorema della funzione implicita, il teorema del rango.

15) Funzione analitiche e formula di Cauchy. Calcolo di integrali impropri usando la formula di Cauchy.

Testi consigliati:

Per lezioni:

- J.P.Cecconi, G.Stampacchia, Analisi Matematica 2 volume, Funzioni di più variabili, Liguori Editore, 1986
- E.Giusti, Analisi Matematica 2, Bollati Boringhieri, 1989.
- N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, Liguori Editore, 1996
- P.Acquistapace, Lezioni di Analisi Matematica 2, <http://www.dm.unipi.it/~acquistap/>

Per approfondire alcuni temi si possono usare anche:

- W.Rudin, Principi di Analisi Matematica, McGraw Hill Libri Italia SRL, 1991.
- M. Giaquinta, G. Modica, Mathematical Analysis An Introduction to Functions of Several Variables Birkhäuser, 2009.
- A. W. Knap, Basic Real Analysis, Along with a companion volume Advanced Real Analysis, Birkhäuser, 2005
- E.Stein, R.Shakarchi, Princeton Lectures in Analysis, III Real Analysis:, Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces, Princeton Univ. Press, 2005

Libri per esercitazioni:

- E. Giusti, Esercizi e complementi di Analisi Matematica, volume secondo, Bollati Boringhieri, 1994.
- J.P.Cecconi, L.C.Piccinini, G.Stampacchia, Esercizi e problemi di Analisi Matematica, 2 volume, Funzioni di più variabili, Liguori Editore, 1986

Per problemi con difficoltà più elevata:

- E. Acerbi; L. Modica; S. Spagnolo, Problemi scelti di analisi matematica II, Liguori Editore 1986.
- G.Polya, G. Szegő, Problems and Theorems in Analysis II: Theory of Functions. Zeros. Polynomials. Determinants. Number Theory. Geometry (Classics in Mathematics), Springer, 2004.
- Paulo Ney de Souza, Jorge-Nuno Silva, Berkeley Problems in Mathematics, Third Edition, Springer, 2004

PROGRAMMA PRELIMINARE DI ARITMETICA

Roberto Dvornicich

Anno Accademico 2014-2015

CONTENUTI :

Proprietà dei numeri naturali. Assioma di buon ordinamento e principio di induzione.

Elementi di calcolo combinatorio: permutazioni, combinazioni, principio di inclusione-esclusione.

Numeri interi: divisione euclidea, divisibilità, massimo comune divisore e minimo comune multiplo, algoritmo di Euclide. Numeri primi, teorema di fattorizzazione unica. Piccolo teorema di Fermat e funzione di Eulero.

Congruenze. Teorema cinese del resto. Equazioni e sistemi di congruenze, equazioni diofantee di primo grado. Relazioni di equivalenza e insiemi quoziente. Struttura delle classi resto.

Gruppi e sottogruppi, gruppi abeliani e gruppi ciclici. Ordine di un elemento di un gruppo. Sottogruppi dei gruppi ciclici. Omomorfismi di gruppi. Classi laterali, sottogruppi normali e gruppo quoziente. Teorema di omomorfismo. Corrispondenza fra i sottogruppi di un gruppo e quelli di un suo quoziente.

Congruenze di secondo grado e congruenze esponenziali.

Numeri complessi: operazioni fondamentali e calcolo delle radici ennesime.

Polinomi a coefficienti razionali, reali e complessi, e nei campi con un numero primo di elementi. Proprietà del grado e divisione euclidea. Teorema di Ruffini. Polinomi irriducibili e fattorizzazione unica. Fattorizzazione di polinomi. Criterio di Eisenstein. Radici multiple dei polinomi e criterio della derivata.

Numeri algebrici e numeri trascendenti. Polinomio minimo di un elemento algebrico su un campo. Estensioni algebriche semplici. Torri di estensioni, formula dei gradi. Campo di spezzamento di un polinomio. Campi finiti. Campo di spezzamento del polinomio $X^n - 1$ sui campi finiti.

TESTI DI RIFERIMENTO :

B. Scimemi, Algebrèta, Ed. Decibel (Zanichelli)

L. Childs, Algebra, un'introduzione concreta, ETS Editrice

I.N. Herstein, Algebra, Editori Riuniti

P. Di Martino (con la revisione di R. Dvornicich), Algebra, Edizioni Plus, Università di Pisa

OBIETTIVI FORMATIVI :

Introduzione all'aritmetica e all'algebra elementare; educazione alla formalizzazione in matematica.

PREREQUISITI :

Programmi di matematica della scuola secondaria superiore.

METODI DIDATTICI :

3 ore di lezione e 3 ore di esercitazione alla settimana (due docenti).

MODALITA' DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO :

Esame scritto ed esame orale.

ALTRE INFORMAZIONI :

Nessuna.

INSEGNAMENTO DI CALCOLO SCIENTIFICO

Docenti LUCA GEMIGNANI/DARIO ANDREA BINI

Anno Accademico 2013/2014

Laurea Matematica Anno di Corso III Semestre II

Numero crediti 6

1) Programma del Corso

a) Generalita` sul problema agli autovalori.

Condizionamento del problema agli autovalori.

Teorema di Bauer-Fike e condizionamento di un autovalore semplice.

Teoremi di localizzazione e stime a

posteriori sull'errore nel calcolo di autovalori.

b) Riduzione in forma tridiagonale (Hessenberg)

di matrici hermitiane (general) con il metodo di Householder.

Metodo QR per il calcolo degli autovalori:

convergenza. Metodo QR per il calcolo degli autovalori:

complessita` computazionale, tecniche di shift e condizioni di arresto.

Calcolo degli autovettori: metodo delle potenze e delle potenze inverse.

c) Metodi divide et impera per il calcolo

di autovalori di matrici tridiagonali hermitiane.

Metodo di Newton per il calcolo di

autovalori di matrici tridiagonali hermitiane.

Successioni di Sturm. Calcolo del polinomio

caratteristico e della sua derivata per matrici tridiagonali

hermitiane e in forma di Hessenberg.

d) Approssimazione ai minimi quadrati.

Decomposizione ai valori singolari (SVD).

Proprieta` della SVD e

inverse generalizzate.

Calcolo della SVD: riduzione in forma

bidiagonale e calcolo della SVD per matrici bidiagonali.

e) Metodi iterativi per matrici strutturate.

Metodo del gradiente ottimo e del gradiente

coniugato. Analisi della convergenza del metodo

del gradiente coniugato. Introduzione ai metodi di preconditionamento.

Applicazioni alla risoluzione numerica di problemi per equazioni

differenziali.

f) Applicazione dei metodi alla risoluzione di

alcuni problemi del mondo reale tra cui: problemi del Web quali

determinazione del PageRank e information

retrieval, studio delle vibrazioni di sistemi elastici discreti,

studio delle configurazioni di equilibrio di sistemi discreti, discretizzazione di

alcuni problemi di vibrazione e di equilibrio nel caso continuo,

modelli matematici di sfocatura e di restauro di immagini digitali, metodi di

compressione di immagini.

2) Riferimenti Bibliografici

a) J. W. Demmel, Applied numerical linear algebra, SIAM,

Philadelphia, PA, 1997.

b) Bini, D., Capovani, M., Menchi, O.,
Metodi numerici per l'algebra lineare, Nicola Zanichelli Editore, Bologna,
1988.

3) Obiettivi Formativi

Apprendimento delle tecniche e degli strumenti
per la risoluzione numerica di problemi discreti
tipicamente di algebra lineare che scaturiscono nelle
applicazioni della matematica. Nel corso di esercitazioni
l'enfasi e` posta sulle problematiche che scaturiscono
dall'implementazione degli algoritmi e dalla validazione dei risultati.

4) Modalita` di Esame

Prova scritta da svolgersi con l'ausilio
del calcolatore. Colloquio finale con modalita`
di seminario o di esame orale.

Corso di Laurea in MATEMATICA

Elementi di Analisi Complessa

A.A. 2014/15 Primo Semestre

Prof. Francesca Acquistapace

1. La topologia compatto-aperta.

- Topologia dello spazio delle funzioni continue.
- Convergenza di successioni di funzioni olomorfe.
- I compatti dello spazio delle funzioni olomorfe.

2. Trasformazioni conformi

- Lemma di Schwarz.
- Automorfismi del semipiano e del disco.
- Altri esempi.
- Automorfismi del piano complesso.
- Automorfismi della sfera, il gruppo delle omografie.
- Proprietà del gruppo delle omografie
- Il teorema di Riemann.
- Applicazioni.

3. Prodotti infiniti

- Prodotti infiniti.
- Fattorizzazione di Weierstrass.
- Teorema di Mittag Leffler.

3. Funzioni olomorfe di più variabili complesse

- Definizione ed esempi.
- Condizioni di Cauchy Riemann e conseguenze.
- Prolungamento analitico.
- Integrale di Cauchy.
- Teorema di Hartogs.
- Principio del massimo.
- Teorema di estensione di Riemann. Zero set di una funzione olomorfa.
- Teorema delle funzioni implicite e teorema del rango nel caso olomorfo. Biolomorfismi.
- Sottovarietà complesse di $\mathbf{C}^n$.
- Proprietà locali e proprietà globali.

4. Serie di potenze

- L'algebra delle serie convergenti.

- Il teorema di preparazione di Weierstrass.
- Il teorema di divisione
- Conseguenze: $\mathbf{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ è noetheriano e a fattorizzazione unica.
- Digressione sull'anello delle serie formali: teorema di divisione e di preparazione formale e conseguenze per il caso reale.
- Germi di insiemi analitici e ideali di germi.
- Componenti irriducibili di un germe di insieme analitico.
- Il Nullstellensatz per un ideale principale.
- Il Nullstellensatz per un ideale primo.
- Rivestimenti analitici
- Singolarità di un germe di insieme analitico.
- Dimensione di un germe analitico.

Testi consigliati:

- H. Cartan** : Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes. Enseignement des Sciences. Hermann, Paris 1961.
- J.P. Gilman, I. Kra, R.E. Rodriguez**: Complex Analysis. Graduate Texts in Mathematics 245. Springer.
- W. Rudin** : Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987
- R. Gunning, H. Rossi**: Analytic functions of several complex variables. Prentice – Hall 1965.
- J.M. Ruiz** : The Basic Theory of Power Series. Quaderni del Dottorato.

Prerequisiti

Il Corso si pone come naturale continuazione del Corso di Geometria II. Altri prerequisiti sono nei programmi dei Corsi di Algebra di Analisi del primo biennio.

Esami

La prova d'esame consiste in un colloquio orale sul programma svolto o, in alternativa, di un seminario su un argomento collegato al Corso e concordato con il docente.

Corso: ELEMENTI DI GEOMETRIA ALGEBRICA
Docente: Rita Pardini
Anno Accademico: 2014-2015

Contenuti del corso (programma provvisorio):

-Richiami di algebra lineare e commutativa: Omogeneizzazione e disomogeneizzazione di polinomi. Teorema di Eulero. Estensioni intere e finite di anelli; normalizzazione di Noether.
Algebra multilineare: algebra tensoriale, algebra simmetrica e algebra esterna su uno spazio vettoriale di dimensione finita.
Grado di trascendenza di un'estensione di campi finitamente generata.

-Richiami sulle curve piane e ipersuperfici complesse. Cubiche piane: forma normale di Weierstrass, l'invariante J , configurazione dei flessi, legge di gruppo.

-Varieta' affini:
Topologia di Zariski sullo spazio affine. Spazi topologici noetheriani e decomposizione in irriducibili. Il Nullstellensatz di Hilbert.
Anello delle coordinate e applicazioni affini, morfismi e isomorfismi, varieta' affini. Nullstellensatz relativo. Spettro massimale e spettro primo di un anello.

-Varieta' proiettive:
Topologia di Zariski nello spazio proiettivo, Nullstellensatz omogeneo, chiusura proiettiva di una varieta' affine. Morfismi. Applicazione di Veronese.
Grassmanniane.

-Esempi di gruppi algebrici e azioni di gruppo: G_m , G_a , $GL(n)$, $PGL(n)$, la cubica piana liscia.

-Varieta' quasi-proiettive:
Gli aperti affini sono una base (proprieta' di compattezza).
Funzioni regolari e morfismi. Applicazione di Segre e prodotti.
L'immagine di una varieta' proiettiva tramite un morfismo e' chiusa.
Funzioni razionali e applicazioni razionali. Campo delle funzioni razionali e equivalenza birazionale.
Ogni varieta' irriducibile e' birazionale a un'ipersuperficie.
Dimensione e singularita': Dimensione come grado di trascendenza del campo delle funzioni razionali.
Spazio tangente e singularita' di una varieta' algebrica, i punti non singolari sono un aperto denso.
Dimensione di un sottoinsieme chiuso proprio, dimensione del prodotto.
Dimensione dell'intersezione con un'ipersuperficie (senza dimostrazione), definizione topologica di dimensione.
Il teorema sulla dimensione delle fibre di un morfismo (senza dimostrazione).
Applicazione: il numero di rette sulla superficie generale di grado d in P^3 .

Riferimenti bibliografici:

- 1) E. Fortuna, R. Frigerio, R. Pardini, Geometria proiettiva, Problemi risolti e richiami di teoria, UNITEXT Springer (2011).
- 2) M. Atiyah, I. MacDonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley (1969).
- 3) M. Reid, Undergraduate Algebraic Geometry, Cambridge University Press (1988).
- 4) I. R. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry 1, (Second edition), Springer (1994).
- 5) K. Smith, et al., An invitation to algebraic geometry. Universitext. Springer (2000).
- 6) R. Hartshorne, Algebraic Geometry, G.T.M. 52 Springer (1977).

Argomenti propedeutici: si utilizzeranno nel corso nozioni di base di topologia, di algebra e di geometria proiettiva, tutte comprese nei programmi di Geometria 2 e Algebra 2. E' quindi auspicabile che gli studenti abbiano seguito già' questi due corsi.

Modalita' d'esame: esame orale.

Programma di: Elementi di Meccanica Celeste

Docente: Anna M. Nobili

Anno Accademico: 2014-2015

Laurea Matematica (Triennale) **Anno di Corso** Terzo **Semestre** Primo

Numero crediti : 6 (48 ore)

Nota: Se ritenuto utile dagli studenti il corso può essere tenuto in tutto o in parte in lingua Inglese

Contenuti dell' Insegnamento

Il Corso si articola nei seguenti 5 argomenti principali tra loro collegati:

1. Problema dei 2-corpi ed Equazione di Keplero. Soluzione del problema dei 2-corpi con l'uso del vettore di Lenz. Orbite ed elementi orbitali. Equazione di Keplero, legge oraria e soluzione numerica..
2. Problema dei 2-corpi in caso di violazione del Principio di Equivalenza. Soluzione, confronto con il caso classico e rilevanza per esperimenti spaziali con corpi celesti e/o artificiali
3. Problema dei 3 corpi ristretto circolare. Equazioni del moto, integrale di Jacobi, criterio di stabilità di Hill. Esempi di moti ordinati e moti caotici (anche in assenza di instabilità macroscopiche). Accenni al problema ristretto ellittico
4. Moti della Terra come corpo esteso. Si scrivono e si risolvono le equazioni che descrivono il moto dei poli della Terra (precessione libera, precessione lunisolare e loro effetti astronomici).
5. Potenziale mareale ed effetti della marea. Si ricava il potenziale che genera le maree. Si discutono gli effetti della marea sul moto della Terra, della Luna e di altri corpi del Sistema Solare

Testi di Riferimento: Gli studenti possono disporre delle note del docente recentemente riscritte in Latex e trasformate in PDF a cura dello studente Daniele Serra (in Italiano). Sono anche invitati a fare riferimento ad alcune parti specifiche e ben segnalate di 3 testi ("Orbital motion", di Archie E. Roy, Ed. Adam Hilger; "Introduction a la mecanique celeste", di Jean Kovalevsky, Ed. (Librairie Armand Colin, Paris; "Non gravitational perturbations and satellite geodesy", di A. Milani, A.M. Nobili e P. Farinella, Ed. Adam Hilger). **Tutto il materiale viene reso disponibile in rete in formato PDF.**

Obiettivi Formativi: Elementi di base della meccanica celeste e loro applicazione quantitativa al moto dei corpi celesti e dei satelliti artificiali, ai moti dell'asse di rotazione della terra, agli effetti delle maree sulla terra e nel sistema solare.

Prerequisiti: Fisica 1 e Analisi 1

Metodi Didattici: Il corso prevede lezioni frontali alla lavagna e col computer e interazione diretta

con gli studenti per discussioni specifiche su loro richiesta. Gli studenti sono sollecitati ad affrontare, se vogliono, problemi specifici con l'aiuto del computer e di software di cui viene garantita la disponibilità. In questo caso il lavoro viene valutato come parte dell'esame finale.

Modalità di Verifica dell'Apprendimento: Durante le lezioni gli studenti vengono sollecitati con domande sull'argomento trattato per capire se sono in condizione di seguire. L'esame finale è solo orale ma di lunga durata. Lo studente può scegliere di iniziare l'esame discutendo un argomento a scelta, sul quale, sotto la guida del docente, ha preparato una breve presentazione. Si può trattare dell'approfondimento di un argomento trattato a lezione oppure della presentazione di uno a questi collegato che abbia suscitato il suo interesse. Lo scopo è di mettere lo studente a proprio agio partendo da un argomento che ha ben preparato, e anche di abituarlo ad acquisire una propria autonomia nell'affrontare e presentare un argomento scientifico ben delimitato. La docente si riserva di valutare ogni singola richiesta per evitare che questa attività vada a discapito del programma di base del corso.

Orario delle lezioni (salvo possibili aggiustamenti con gli studenti interessati) e ricevimento studenti

Lunedì ore 16-18 Aula M1

Mercoledì ore 16-18 Aula M1

RICEVIMENTO STUDENTI: Le due ore di lezione iniziano puntuali (senza quarto d'ora accademico). Nell'ultima mezz'ora la docente resta nell'aula assegnata al corso a disposizione degli studenti; nella successiva mezz'ora continua il ricevimento degli studenti nel proprio studio.

Insegnamenti tenuti da PRATELLI Maurizio

052AA-ELEMENTI DI PROBABILITA' E STATISTICA

Programma d'esame:

Definizione di spazio di Probabilità. Variabili aleatorie definite su uno spazio numerabile: valori attesi, momenti, funzioni generatrici.

Inferenza statistica su spazi di Probabilità numerabili.

Spazi di Probabilità più generali, in particolare probabilità definite da una densità rispetto alla misura di Lebesgue.

Inferenza statistica generale, in particolare sui modelli Gaussiani. I principali test statistici, modelli di regressione.

110AA-FINANZA MATEMATICA

Programma d'esame:

Modelli di mercato a tempi discreti: assenza di arbitraggio e I e II teorema fondamentale dell'asset pricing.

Il modello di Samuelson-Black-Scholes e le formule di B.S. Alcune generalizzazioni (modelli a volatilità stocastica).

Il principio del Cambio di numerario e sue applicazioni.

Modelli per la Struttura a Termine dei tassi d'interesse: modelli basati sul tasso a breve e sul tasso forward. Modelli per i tassi LIBOR (la formula “Black-76”).

Elementi di Topologia Algebrica 14/15 (Prof. Carlo Petronio)

1. DEFINIZIONE DI OMOLOGIA (SIMPLICIALE)

Categorie e funtori (cenni). Complessi di catene e loro omologia.

Complessi simpliciali geometrici e loro omologia. Complessi politopali, omologia, suddivisione e invarianza dell'omologia per suddivisione (cenni). 0-omologia. 1-omologia come abelianizzazione del gruppo fondamentale. Teorema di approssimazione simpliciale. L'omologia come funtore. Proprietà di omotopia del funtore omologia. Omologia del punto.

2. VARIETA'

Varietà topologiche, differenziabili e PL, con e senza bordo.

Orientabilità. n-omologia di una n-varietà. Definizione PL di grado e sua caratterizzazione differenziabile. Applicazioni del grado: funzioni da S^1 in sé, teorema fondamentale dell'algebra, immersioni da S^1 in $\mathbb{R}^2$ e in S^2 , teorema del punto fisso di Brouwer. $\mathbb{R}^n$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^m$ per n diverso da m . Teorema di Jordan-Schoenflies con dimostrazioni PL e liscia. Hauptvermutung in dimensione 2; superfici PL e loro classificazione.

3. ASSIOMI DELL'OMOLOGIA

Successioni esatte ed esatte corte. Omologia relativa. Omotopia ed escissione. La successione esatta lunga in omologia. Successione esatta di Mayer-Vietoris. Omologia delle sfere. Unicità dell'omologia dati gli assiomi.

4. ALTRE TEORIE OMOLOGICHE

Delta-complessi, complessi simpliciali astratti e loro realizzazioni. CW complessi. Omologia singolare e sue proprietà. Interpretazione dell'omologia relativa e dell'omomorfismo di bordo nella successione esatta lunga. Omologia a coefficienti in un gruppo. $\text{Tor}(A,B)$ e teorema dei coefficienti universali per l'omologia. Formula di Kunneth.

5. COOMOLOGIA

Coomologia di un complesso di catene. $\text{Ext}(A,B)$ e teorema dei coefficienti universali per la coomologia. Proprietà assiomatiche della coomologia. Prodotto in coomologia e dualità di Poincaré.

Testi consigliati (segui soprattutto il primo e in parte il secondo; gli altri servono solo come riferimento):

Matveev - Lectures on algebraic topology Hatcher - Algebraic topology

Spanier - Algebraic topology Massey - A basic course in algebraic topology

Munkres - Elements of algebraic topology

Greenberg, Harper - Algebraic topology. A first course

Corso di laurea in Matematica
Anno accademico 2014/2015, primo semestre
Corso di Sistemi Dinamici

Docenti: Prof. Andrea MILANI COMPARETTI, Dr. Giacomo Tommei

CONTENUTI DEL CORSO

- [1] **Introduzione:** Sistemi dinamici continui e discreti, lineari e nonlineari, conservativi, integrabili: definizioni ed esempi semplici.
- [2] **Sistemi dinamici lineari:** richiami di algebra lineare, esponenziale di matrici, prodotto di serie, autovalori reali e complessi, nilpotenti, risonanza.
- [3] **Teoria qualitativa:** Richiami sulle soluzioni dei problemi alle condizioni iniziali. Stabilità, instabilità, sorgenti e pozzi, esponenti e funzioni di Lyapounov, sistemi Newtoniani conservativi e con dissipazione, sistemi gradiente, selle, insiemi limite, orbite periodiche, teorema di Poincaré-Bendixon.
- [4] **Sistemi discreti e discretizzazione:** equazioni alle differenze finite lineari, esempi di applicazioni all'economia matematica, metodo di Eulero, errore di troncamento e convergenza, discretizzazione conservativa, mappa standard.
- [5] **Sistemi Hamiltoniani a un grado di libertà:** teorema di Liouville, integrabilità e legge oraria, studio qualitativo, trasformata di Legendre, sistemi lagrangiani, moti vincolati, trasformazioni canoniche, variabili azione-angolo.
- [6] **Caos:** regioni caotiche per la mappa standard, teorema delle separatrici, punti omoclinici, insiemi iperbolici, ferro di cavallo di Smale, regioni ordinate, esponenti di Lyapounov, definizione di caos.

TESTI DI RIFERIMENTO

A. Milani, *Introduzione ai sistemi dinamici*, Seconda edizione riveduta e corretta, Edizioni Plus, Pisa, 2009; 256 pagine + CD-ROM, prezzo 18 euro. Contiene più di 80 esercizi (lo svolgimento degli esercizi e i programmi per alcuni esperimenti numerici sono disponibili sul CD-ROM venduto con il libro).

OBIETTIVI FORMATIVI

Conoscenze di base sull'algebra delle matrici e sui sistemi dinamici lineari, sui concetti di stabilità, equilibrio, integrale primo, sulle equazioni alle differenze finite.

Conoscenze specifiche sulla teoria qualitativa, soprattutto nel piano, sui sistemi conservativi con i formalismi newtoniano, lagrangiano e hamiltoniano, sulla discretizzazione di equazioni differenziali ordinarie, sui sistemi dinamici non integrabili e caotici.

Esempi formativi di applicazioni a sistemi meccanici, economici, a problemi modello.

FONDAMENTI DI PROGRAMMAZIONE CON LAB. (017AA)

Docente Chiara Bodei

A.A. 2014-2015

I Anno, Laurea Triennale (I semestre) 9 CFU

CONTENUTI INSEGNAMENTO

I parte Linguaggio C, come esempio di linguaggio di programmazione.

- Introduzione all'informatica con cenni all'hardware e alla rappresentazione binaria.
- Introduzione ai principi della programmazione, attraverso uno pseudo-linguaggio dotato di un insieme di costrutti linguistici che costituiscono il nucleo di un qualunque linguaggio di programmazione e attraverso qualche cenno alla semantica operativa di un semplice linguaggio imperativo.
- Primi elementi del linguaggio: variabili ed espressioni aritmetiche.
- L'istruzione if e gli operatori logici.
- Variabili di tipo char, int, long int, float, double.
- Istruzione switch-case.
- Istruzioni for, break, continue.
- Istruzioni while e do-while.
- Array e matrici.
- Stringhe.
- Definizione di nuove funzioni.
- Passaggio dei parametri e prototipi. Il tipo void.
- Funzioni ricorsive e loro uso.
- Puntatori e allocazione dinamica della memoria.
- Tipi fondamentali e tipi strutturati.
- Liste concatenate.

II parte Cenni di teoria degli automi e dei linguaggi.

- Classificazione delle grammatiche e dei linguaggi formali.
- Automi a stati finiti.
- Linguaggio riconosciuto da un automa a stati finiti.
- Automi deterministici e non deterministici e loro equivalenza.
- Pumping Lemma per i linguaggi regolari.
- Proprietà dei linguaggi regolari rispetto alle operazioni di unione, intersezione, complemento, prodotto e chiusura.
- Grammatiche libere dal contesto e linguaggi liberi.
- Pumping Lemma per i linguaggi liberi

TESTI DI RIFERIMENTO

- S.Ceri, D.Mandrioli, I.Sbattella. Informatica: programmazione McGraw-Hill.
- J. Hopcroft, J. Ullman. Automi, linguaggi e calcolabilità. Pearson. Addison-Wesley.

BIBLIOGRAFIA DI APPROFONDIMENTO

- B. W. Kerninghan, D. M. Ritchie. Linguaggio C Pearson.
- A. Bellini, A. Guidi. Linguaggio C, guida alla programmazione. McGraw-Hill.

OBIETTIVI FORMATIVI

Il corso intende presentare i fondamenti della programmazione. A questo scopo, nella prima parte del corso, viene introdotto C, come esempio di linguaggio di programmazione. Al termine del corso gli studenti devono essere in grado di tradurre un metodo astratto di risoluzione di un problema in un programma funzionante. Questa parte del corso è fortemente integrata con il corso di Laboratorio di Programmazione. Successivamente il corso si propone di illustrare alcuni concetti di informatica teorica. In particolare si farà cenno alla classificazione delle grammatiche e dei linguaggi formali e si affronterà la teoria degli automi a stati finiti.

METODI DIDATTICI

Il corso consiste in 30 ore di lezione e 30 di esercitazioni. Lezioni ed esercitazioni consistono in lezioni frontali in un aula tradizionale. Inoltre il corso prevede due ore di esercitazioni di Programmazione in Laboratorio alla settimana.

MODALITÀ DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

L'esame consiste in una prova scritta (o due prove in itinere) e una prova orale.

Geometria Analitica e Algebra Lineare

A.A. 2014-2015

Docente: Elisabetta Fortuna

Programma preliminare

Nota: il seguente è un programma di massima; a seconda dello svolgimento concreto del corso potranno esserci alcune variazioni. Sia le prove in itinere (compitini) sia l'esame finale verteranno sul programma effettivamente svolto, che gli studenti sono invitati a verificare sulla pagina web dedicata ai registri delle lezioni.

Spazi vettoriali e sottospazi. Applicazioni lineari, nucleo e immagine, isomorfismi, lo spazio $\text{Hom}(V, W)$. Identificazione fra $\text{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ e $M(p, n, \mathbb{K})$. Sistemi lineari, algoritmo di Gauss. Equazioni parametriche e cartesiane di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$. Composizione di applicazioni lineari, prodotto righe per colonne di matrici. Indipendenza lineare, basi, dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato. Formula di Grassmann, formula delle dimensioni di nucleo e immagine di un'applicazione lineare. Passaggio alle coordinate, matrice associata ad un'applicazione lineare, cambiamenti di base. Rango di un'applicazione lineare e di una matrice, rango della trasposta di una matrice; calcolo dell'inversa di una matrice invertibile. Spazio duale, annullatore di un sottospazio, applicazione trasposta. Isomorfismo canonico fra uno spazio vettoriale finitamente generato e il suo bidual.

Teoria del determinante e applicazioni: definizione assiomatica del determinante, esistenza e unicità, interpretazione geometrica, formule esplicite, sviluppi di Laplace, teorema di Binet, regola di Cramer, formula dell'inversa di una matrice invertibile, determinante della trasposta, caratterizzazione del rango di una matrice via determinanti.

Endomorfismi di uno spazio vettoriale, sottospazi invarianti. Endomorfismi coniugati e matrici simili. Autovalori e autospazi, polinomio caratteristico. Caratterizzazione degli endomorfismi diagonalizzabili e di quelli triangolabili. Teorema di Hamilton-Cayley. Ideale di un endomorfismo, polinomio minimo. Forma canonica di Jordan. Forma di Jordan reale.

Forme bilineari. Matrici rappresentative di forme bilineari, matrici congruenti. Rango di una forma, forme non degeneri. Prodotti scalari e forme quadratiche. Ortogonalità, vettori isotropi, esistenza di basi ortogonali, procedimenti di ortogonalizzazione, proiezioni ortogonali. Isometrie, ogni gruppo ortogonale è generato da riflessioni. Classificazione dei prodotti scalari reali e complessi a meno di isometrie, criterio di Jacobi. Dualità e teoremi di rappresentazione. Aggiunto di un endomorfismo. Spazi Euclidei, il gruppo ortogonale reale, algoritmo di Gram-Schmidt. Operatori autoaggiunti, il Teorema spettrale reale.

Struttura affine di $\mathbb{R}^n$. Spazi affini, combinazioni affini, sottospazi affini e loro giacitura. Sistemi di riferimento affini. Trasformazioni affini. Classificazione affine delle coniche reali e complesse. Caratterizzazione delle trasformazioni di $\mathbb{R}^n$ che preservano la distanza euclidea. Quadriche.

Testi di riferimento

Le lezioni non seguiranno uno specifico libro di testo; lo studente può però reperire i vari argomenti trattati in uno o più dei seguenti testi consigliati (consultabili nella biblioteca del dipartimento):

Abate: *Geometria*, McGraw Hill

Ciliberto: *Algebra lineare*, Bollati Boringhieri

De Bartolomeis: *Algebra Lineare*, La Nuova Italia

Lang: *Algebra lineare*, Bollati Boringhieri

Sernesi: *Geometria 1*, Bollati Boringhieri

Informazioni

Durante il periodo delle lezioni il titolare del corso e l'esercitatore saranno a disposizione degli studenti in orari settimanali prestabiliti per discutere questioni ed esercizi riguardanti gli argomenti trattati nel corso.

L'esame finale prevede una prova scritta e una prova orale. Durante l'anno è previsto lo svolgimento di tre compitini; nel caso in cui la votazione conseguita in ciascuno dei tre compitini sia di almeno 16/30, lo studente è esonerato dalla prova scritta. Tale esonero resta valido durante tutto l'anno accademico ma viene annullato dalla consegna di una prova scritta durante un appello d'esame o dalla partecipazione ad una prova orale.

Nel caso in cui uno studente abbia conseguito in due dei tre compitini una votazione di almeno 16/30 e una votazione inferiore nel restante compitino (o non abbia partecipato a tale prova), lo studente potrà cercare di recuperare il compitino mancante esclusivamente durante il primo appello d'esame. In tale occasione sarà facoltà dello studente decidere se svolgere la prova completa oppure se svolgere solo la prova di recupero.

Nel caso in cui la votazione conseguita in una prova scritta d'esame sia di almeno 16/30, lo studente è ammesso alla prova orale; tale prova può essere sostenuta in qualsiasi appello d'esame fino alla fine dell'anno accademico. La validità dell'ammissione alla prova orale viene annullata da una successiva consegna di una prova scritta durante un appello d'esame o dalla partecipazione ad una prova orale.

Per partecipare ad una prova scritta è richiesto di iscriversi collegandosi al sito <https://boole.dm.unipi.it/hamasy/>

Le iscrizioni si chiudono il giorno precedente all'inizio dell'appello.

È obbligatorio presentarsi allo scritto muniti di libretto universitario o tessera universitaria con foto.

Durante ogni prova scritta o compitino è consentita la consultazione di libri ma non di quaderni e appunti personali.

Programma Provvisorio

Geometria e Topologia Differenziale

Anno Accademico 2014-2015
Roberto Frigerio e Bruno Martelli

Curve nello spazio

1. Curve nello spazio Euclideo tridimensionale. Curve regolari.
2. Parametrizzazione tramite lunghezza d'arco, curvatura e torsione.
3. Riferimento e formule di Frenet.
4. Teorema Fondamentale della teoria locale delle curve.

Varietà: prime nozioni

1. Varietà differenziabili (immerse nello spazio Euclideo). Funzioni lisce, spazio tangente e differenziale. Punti critici e regolari.
2. Parametrizzazioni locali ed espressione come luogo di zeri. Ogni varietà è localmente un grafico.
3. Orientazione e orientabilità.

Teoria metrica delle superfici

1. Superfici nello spazio Euclideo tridimensionale. La prima forma fondamentale.
2. La mappa di Gauss, l'operatore forma, la seconda forma fondamentale.
3. Curvature principali, curvatura media e curvatura di Gauss.
4. Il Teorema Egregium di Gauss.
5. Geodetiche: definizione e loro proprietà. Curvatura geodetica.
6. Caratteristica di Eulero e Teorema di Gauss-Bonnet.

Elementi di Topologia Differenziale

1. Teoremi di Sard e di Brower.
2. Varietà con bordo.
3. Il bordo di una varietà compatta non ne è un retrato liscio. Teorema del punto fisso di Brower.
4. Omotopia e isotopia.
5. Grado modulo 2 di mappe tra varietà compatte e grado intero di mappe tra varietà compatte orientabili.
6. Campi vettoriali. Indice di uno zero di un campo vettoriale. (Non) pettinabilità delle sfere. Teorema di Poincaré-Hopf.

Modalità d'esame

Vi sarà uno scritto sulle prime tre parti del programma, seguito da un orale sull'ultima parte del programma.

Prerequisiti: Livello scolastico della lingua inglese (superato livello A2)

Obiettivi Formativi - Facilitare gli studenti a leggere un testo di matematica scritto in Inglese / Insegnare un inglese base al livello B1 del Consiglio d'Europa

Programma

Inglese scientifico:

- Conoscenza e pronuncia di parole chiave della matematica in lingua inglese
- Essere in grado di capire testi matematici scritti in lingua inglese
- Essere in grado di tradurre testi matematici dall'inglese all'italiano
- Grammatica che serve strettamente per capire un testo matematico
- Nozioni di base sulla struttura di un testo scientifico
- Scrittura di un abstract

Grammatica inglese di base:

- Countable/uncountable nouns
- Articles
- Present simple, continuous and perfect
- Past simple, continuous and perfect
- Future tenses: going to, will and present progressive
- The passive form
- Comparatives and superlatives
- Conditionals
- Link words

Fonetica di base

- L'alfabeto, i 20 suoni delle 5 vocali inglesi, le consonanti
- L'intonazione

Testi di riferimento/consigliati

First Certificate Language Practice (English Grammar and Vocabulary) - 4th edition - with key;
Michael Vince, MACMILLAN

Modalità di verifica dell'apprendimento: Esame scritto e colloquio orale

Programma di Laboratorio Sperimentale di Matematica Computazionale
Docenti: Dario A.~Bini, Lidia Aceto, Sergio Steffe'
Anno Accademico: 2013-2014.
Laurea: Matematica, Indirizzo fondamentale; Anno di Corso: terzo;
Semestre: secondo.
Numero crediti: 6.

CONTENUTI INSEGNAMENTO:

Il laboratorio e' diviso in tre parti.

Prima parte: Elaborazione di immagini digitali. Comandi di Octave per l'elaborazione di immagini digitali. Evidenziazione mediante immagini delle proprieta' dei numeri primi: la spirale di Ulam, implementazione sequenziale e implementazione vettoriale mediante il crivello di Eratostene. Studio della dinamica di successioni nel piano complesso generate mediante iterazione funzionale: bacini di attrazione, figura di Mandelbrot, insiemi di Julia e costruzione di altre figure frattali. Generazione di immagini anamorfiche mediante proiezioni e riflessioni; visualizzazione grafica di trasformazioni di variabile complessa. Filtraggi di immagini digitali mediante la trasformata discreta di Fourier e mediante filtri digitali.

Seconda parte: Modelli differenziali. Studio computazionale di equazioni differenziali che modellano problemi del mondo reale. Problemi ai valori iniziali e loro risoluzione numerica: metodo di Eulero e metodo di Runge-Kutta. La funzione lsode di Octave. Problemi ai valori al contorno. Modelli di crescita delle popolazioni: l'equazione logistica. Modello di Lotka-Volterra di competizione e di predazione fra specie. Modello dell'epidemia. Modelli dinamici: il problema del paracadutista, il pendolo semplice, l'oscillatore armonico, oscillatori accoppiati, vibrazioni di sistemi discreti. Moti centrali. L'attrattore di Lorentz. Il problema dell'inseguimento. Modelli geometrici: curva avente una assegnata curvatura, la catenaria, la goccia d'acqua.

Terza parte: Elaborazione di segnali digitali. Elementi di acustica; analogico vs. digitale; formati digitali standard; suono in linux; suono in Octave. Simulazione dell'effetto doppler. Trasformata discreta di Fourier e filtraggio digitale. Filtri FIR. Effetti acustici: eco, riverbero e chorus, modulazione, spazializzazione. La libreria ALSA.

TESTI DI RIFERIMENTO:

Appunti dei docenti disponibili alle pagine web del corso assieme alla bibliografia

Manuale di Octave accessibile presso
<http://www.gnu.org/software/octave/doc/interpreter/>

MODALITA' DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO:

Contestuale all'attivita' di laboratorio
e mediante lo svolgimento di esercizi assegnati dai docenti.

ALTRE INFORMAZIONI:

Il laboratorio richiede la frequenza. Nel caso di assenze superiori ad 1/4 del totale delle ore, la verifica dell'apprendimento verra' fatta mediante colloquio o progetto.

Programma di Laboratorio Sperimentale di Matematica Computazionale
Docenti: Dario A.~Bini, Lidia Aceto, Sergio Steffe'
Anno Accademico: 2013-2014.
Laurea: Matematica, Indirizzo fondamentale; Anno di Corso: terzo;
Semestre: secondo.
Numero crediti: 6.

CONTENUTI INSEGNAMENTO:

Il laboratorio e' diviso in tre parti.

Prima parte: Elaborazione di immagini digitali. Comandi di Octave per l'elaborazione di immagini digitali. Evidenziazione mediante immagini delle proprieta' dei numeri primi: la spirale di Ulam, implementazione sequenziale e implementazione vettoriale mediante il crivello di Eratostene. Studio della dinamica di successioni nel piano complesso generate mediante iterazione funzionale: bacini di attrazione, figura di Mandelbrot, insiemi di Julia e costruzione di altre figure frattali. Generazione di immagini anamorfiche mediante proiezioni e riflessioni; visualizzazione grafica di trasformazioni di variabile complessa. Filtraggi di immagini digitali mediante la trasformata discreta di Fourier e mediante filtri digitali.

Seconda parte: Modelli differenziali. Studio computazionale di equazioni differenziali che modellano problemi del mondo reale. Problemi ai valori iniziali e loro risoluzione numerica: metodo di Eulero e metodo di Runge-Kutta. La funzione lsode di Octave. Problemi ai valori al contorno. Modelli di crescita delle popolazioni: l'equazione logistica. Modello di Lotka-Volterra di competizione e di predazione fra specie. Modello dell'epidemia. Modelli dinamici: il problema del paracadutista, il pendolo semplice, l'oscillatore armonico, oscillatori accoppiati, vibrazioni di sistemi discreti. Moti centrali. L'attrattore di Lorentz. Il problema dell'inseguimento. Modelli geometrici: curva avente una assegnata curvatura, la catenaria, la goccia d'acqua.

Terza parte: Elaborazione di segnali digitali. Elementi di acustica; analogico vs. digitale; formati digitali standard; suono in linux; suono in Octave. Simulazione dell'effetto doppler. Trasformata discreta di Fourier e filtraggio digitale. Filtri FIR. Effetti acustici: eco, riverbero e chorus, modulazione, spazializzazione. La libreria ALSA.

TESTI DI RIFERIMENTO:

Appunti dei docenti disponibili alle pagine web del corso assieme alla bibliografia

Manuale di Octave accessibile presso
<http://www.gnu.org/software/octave/doc/interpreter/>

MODALITA' DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO:

Contestuale all'attivita' di laboratorio
e mediante lo svolgimento di esercizi assegnati dai docenti.

ALTRE INFORMAZIONI:

Il laboratorio richiede la frequenza. Nel caso di assenze superiori ad 1/4 del totale delle ore, la verifica dell'apprendimento verra' fatta mediante colloquio o progetto.

```

\magnification=\magstep2
\nopagenumbers
\
\vskip 0.2cm
\centerline{\bf Corso di Laurea in Matematica}
\centerline{\bf Laboratorio di Comunicazione Mediante Calcolatore}
\centerline{\bf AA 2014/2015}
\vskip 0.5cm
\centerline{\bf Prof. Sergio Steff\`e}
\centerline{\bf Dipartimento di Matematica}
\centerline{\bf Universit\`a degli Studi di Pisa}
\vskip 0.5cm
\centerline{\bf Programma del Corso}
\vskip 0.2cm
Il laboratorio consiste di 10 sessioni al calcolatore, di 2 ore ciascuna.
\vskip 0.2cm
Scopo del laboratorio \`e quello di fare raggiungere agli studenti del
Corso di Laurea in Matematica la disinvoltura necessaria ad usare gli
strumenti informatici necessari ad un matematico.
\vskip 0.2cm
Molti degli strumenti commercialmente disponibili non sono infatti i
pi\`u
adatti a trattare la matematica, e la generica preparazione che ricevono
gli studenti nella scuola dell'obbligo spesso \`e insufficiente. Si pensi
per
e\sem\pio ai normali programmi di scrittura: i pi\`u noti sono
totalmente
inadatti alla scrittura professionale di lavori di matematica.
\vskip 0.2cm
Inoltre la diffusione di moltissime facili interfacce grafiche da un
lato avvicina
il grande pubblico alla fruizione di moltissimi servizi disponibili su
Internet,
ma dall'altro non insegna a cavarsela con la scrittura di programmi
scientifici cui
tanto spesso anche i matematici devono ricorrere.
Nel laboratorio si cercher\`a di ovviare a questa carenza esercitandosi
anche con interfacce non grafiche.
\vskip 0.2cm
Gli argomenti che saranno sviluppati nel laboratorio comprendono:
Richiami sul funzionamento di un calcolatore. L'uso di Linux e alcuni dei
suoi principali comandi. Elementi della teoria delle reti a pacchetti e
studio del
funzionamento dei calcolatori in Internet. La filosofia Client-Server e
tecniche di utilizzo dei principali servizi
che sfruttano tale principio. La scrittura di testi matematici
utilizzando gli standard internazionali del TeX
e del Latex. Infine sar\`a illustrato l'uso di svariate risorse
matematiche accessibili via calcolatore sulle macchine
del Dipartimento di Matematica.

\end

```

```

\magnification=\magstep2
\nopagenumbers
\
\vskip 0.2cm
\centerline{\bf Corso di Laurea in Matematica}
\centerline{\bf Laboratorio di Comunicazione Mediante Calcolatore}
\centerline{\bf AA 2014/2015}
\vskip 0.5cm
\centerline{\bf Prof. Sergio Steff\`e}
\centerline{\bf Dipartimento di Matematica}
\centerline{\bf Universit\`a degli Studi di Pisa}
\vskip 0.5cm
\centerline{\bf Programma del Corso}
\vskip 0.2cm
Il laboratorio consiste di 10 sessioni al calcolatore, di 2 ore ciascuna.
\vskip 0.2cm
Scopo del laboratorio \`e quello di fare raggiungere agli studenti del
Corso di Laurea in Matematica la disinvoltura necessaria ad usare gli
strumenti informatici necessari ad un matematico.
\vskip 0.2cm
Molti degli strumenti commercialmente disponibili non sono infatti i
pi\`u
adatti a trattare la matematica, e la generica preparazione che ricevono
gli studenti nella scuola dell'obbligo spesso \`e insufficiente. Si pensi
per
e\sem\pio ai normali programmi di scrittura: i pi\`u noti sono
totalmente
inadatti alla scrittura professionale di lavori di matematica.
\vskip 0.2cm
Inoltre la diffusione di moltissime facili interfacce grafiche da un
lato avvicina
il grande pubblico alla fruizione di moltissimi servizi disponibili su
Internet,
ma dall'altro non insegna a cavarsela con la scrittura di programmi
scientifici cui
tanto spesso anche i matematici devono ricorrere.
Nel laboratorio si cercher\`a di ovviare a questa carenza esercitandosi
anche con interfacce non grafiche.
\vskip 0.2cm
Gli argomenti che saranno sviluppati nel laboratorio comprendono:
Richiami sul funzionamento di un calcolatore. L'uso di Linux e alcuni dei
suoi principali comandi. Elementi della teoria delle reti a pacchetti e
studio del
funzionamento dei calcolatori in Internet. La filosofia Client-Server e
tecniche di utilizzo dei principali servizi
che sfruttano tale principio. La scrittura di testi matematici
utilizzando gli standard internazionali del TeX
e del Latex. Infine sar\`a illustrato l'uso di svariate risorse
matematiche accessibili via calcolatore sulle macchine
del Dipartimento di Matematica.

\end

```

```

\magnification=\magstep2
\nopagenumbers
\
\vskip 0.2cm
\centerline{\bf Corso di Laurea in Matematica}
\centerline{\bf Laboratorio di Comunicazione Mediante Calcolatore}
\centerline{\bf AA 2014/2015}
\vskip 0.5cm
\centerline{\bf Prof. Sergio Steff\`e}
\centerline{\bf Dipartimento di Matematica}
\centerline{\bf Universit\`a degli Studi di Pisa}
\vskip 0.5cm
\centerline{\bf Programma del Corso}
\vskip 0.2cm
Il laboratorio consiste di 10 sessioni al calcolatore, di 2 ore ciascuna.
\vskip 0.2cm
Scopo del laboratorio \`e quello di fare raggiungere agli studenti del
Corso di Laurea in Matematica la disinvoltura necessaria ad usare gli
strumenti informatici necessari ad un matematico.
\vskip 0.2cm
Molti degli strumenti commercialmente disponibili non sono infatti i
pi\`u
adatti a trattare la matematica, e la generica preparazione che ricevono
gli studenti nella scuola dell'obbligo spesso \`e insufficiente. Si pensi
per
e\sem\pio ai normali programmi di scrittura: i pi\`u noti sono
totalmente
inadatti alla scrittura professionale di lavori di matematica.
\vskip 0.2cm
Inoltre la diffusione di moltissime facili interfacce grafiche da un
lato avvicina
il grande pubblico alla fruizione di moltissimi servizi disponibili su
Internet,
ma dall'altro non insegna a cavarsela con la scrittura di programmi
scientifici cui
tanto spesso anche i matematici devono ricorrere.
Nel laboratorio si cercher\`a di ovviare a questa carenza esercitandosi
anche con interfacce non grafiche.
\vskip 0.2cm
Gli argomenti che saranno sviluppati nel laboratorio comprendono:
Richiami sul funzionamento di un calcolatore. L'uso di Linux e alcuni dei
suoi principali comandi. Elementi della teoria delle reti a pacchetti e
studio del
funzionamento dei calcolatori in Internet. La filosofia Client-Server e
tecniche di utilizzo dei principali servizi
che sfruttano tale principio. La scrittura di testi matematici
utilizzando gli standard internazionali del TeX
e del Latex. Infine sar\`a illustrato l'uso di svariate risorse
matematiche accessibili via calcolatore sulle macchine
del Dipartimento di Matematica.

\end

```

```

\magnification=\magstep2
\nopagenumbers
\
\vskip 0.2cm
\centerline{\bf Corso di Laurea in Matematica}
\centerline{\bf Laboratorio di Comunicazione Mediante Calcolatore}
\centerline{\bf AA 2014/2015}
\vskip 0.5cm
\centerline{\bf Prof. Sergio Steff\`e}
\centerline{\bf Dipartimento di Matematica}
\centerline{\bf Universit\`a degli Studi di Pisa}
\vskip 0.5cm
\centerline{\bf Programma del Corso}
\vskip 0.2cm
Il laboratorio consiste di 10 sessioni al calcolatore, di 2 ore ciascuna.
\vskip 0.2cm
Scopo del laboratorio \`e quello di fare raggiungere agli studenti del
Corso di Laurea in Matematica la disinvoltura necessaria ad usare gli
strumenti informatici necessari ad un matematico.
\vskip 0.2cm
Molti degli strumenti commercialmente disponibili non sono infatti i
pi\`u
adatti a trattare la matematica, e la generica preparazione che ricevono
gli studenti nella scuola dell'obbligo spesso \`e insufficiente. Si pensi
per
e\sem\pio ai normali programmi di scrittura: i pi\`u noti sono
totalmente
inadatti alla scrittura professionale di lavori di matematica.
\vskip 0.2cm
Inoltre la diffusione di moltissime facili interfacce grafiche da un
lato avvicina
il grande pubblico alla fruizione di moltissimi servizi disponibili su
Internet,
ma dall'altro non insegna a cavarsela con la scrittura di programmi
scientifici cui
tanto spesso anche i matematici devono ricorrere.
Nel laboratorio si cercher\`a di ovviare a questa carenza esercitandosi
anche con interfacce non grafiche.
\vskip 0.2cm
Gli argomenti che saranno sviluppati nel laboratorio comprendono:
Richiami sul funzionamento di un calcolatore. L'uso di Linux e alcuni dei
suoi principali comandi. Elementi della teoria delle reti a pacchetti e
studio del
funzionamento dei calcolatori in Internet. La filosofia Client-Server e
tecniche di utilizzo dei principali servizi
che sfruttano tale principio. La scrittura di testi matematici
utilizzando gli standard internazionali del TeX
e del Latex. Infine sar\`a illustrato l'uso di svariate risorse
matematiche accessibili via calcolatore sulle macchine
del Dipartimento di Matematica.

\end

```



```

\magnification=\magstep2
\nopagenumbers
\
\vskip 0.2cm
\centerline{\bf Corso di Laurea in Matematica}
\centerline{\bf Laboratorio di Comunicazione Mediante Calcolatore}
\centerline{\bf AA 2014/2015}
\vskip 0.5cm
\centerline{\bf Prof. Sergio Steff\`e}
\centerline{\bf Dipartimento di Matematica}
\centerline{\bf Universit\`a degli Studi di Pisa}
\vskip 0.5cm
\centerline{\bf Programma del Corso}
\vskip 0.2cm
Il laboratorio consiste di 10 sessioni al calcolatore, di 2 ore ciascuna.
\vskip 0.2cm
Scopo del laboratorio \`e quello di fare raggiungere agli studenti del
Corso di Laurea in Matematica la disinvoltura necessaria ad usare gli
strumenti informatici necessari ad un matematico.
\vskip 0.2cm
Molti degli strumenti commercialmente disponibili non sono infatti i
pi\`u
adatti a trattare la matematica, e la generica preparazione che ricevono
gli studenti nella scuola dell'obbligo spesso \`e insufficiente. Si pensi
per
e\sem\pio ai normali programmi di scrittura: i pi\`u noti sono
totalmente
inadatti alla scrittura professionale di lavori di matematica.
\vskip 0.2cm
Inoltre la diffusione di moltissime facili interfacce grafiche da un
lato avvicina
il grande pubblico alla fruizione di moltissimi servizi disponibili su
Internet,
ma dall'altro non insegna a cavarsela con la scrittura di programmi
scientifici cui
tanto spesso anche i matematici devono ricorrere.
Nel laboratorio si cercher\`a di ovviare a questa carenza esercitandosi
anche con interfacce non grafiche.
\vskip 0.2cm
Gli argomenti che saranno sviluppati nel laboratorio comprendono:
Richiami sul funzionamento di un calcolatore. L'uso di Linux e alcuni dei
suoi principali comandi. Elementi della teoria delle reti a pacchetti e
studio del
funzionamento dei calcolatori in Internet. La filosofia Client-Server e
tecniche di utilizzo dei principali servizi
che sfruttano tale principio. La scrittura di testi matematici
utilizzando gli standard internazionali del TeX
e del Latex. Infine sar\`a illustrato l'uso di svariate risorse
matematiche accessibili via calcolatore sulle macchine
del Dipartimento di Matematica.

\end

```

Linguaggi di Programmazione aa. 2014-2015

Macchine Astratte e Concrete per il calcolo

Struttura di un Linguaggio di Programmazione

Fondamenti sintattici e semantici per la definizione di un L.P.

Metodologie di Programmazione

Naming e Ambiente

Store

Strutture dati

Strutture di Controllo

Astrazioni di dati (e controllo)

Linguaggi Imperativi: struttura e applicazioni

Linguaggi Object Oriented: Struttura e Applicazioni

Linguaggi Funzionali: Struttura e Applicazioni

Linguaggi Distribuiti: Struttura e Applicazioni

Testi

- (1) Gabrielli, M. and M. Martini, Programming Languages: Principles and Paradigms, Springer, 2010, ISBN 978-1-84882-913-8
- (2) Appunti e altro materiale di approfondimento curato dal docente e reso disponibile durante il corso

PROGRAMMA del CORSO di MECCANICA RAZIONALE

Docente: Dott. Giovanni Federico Gronchi

Anno Accademico: 2014/2015

Corso di Laurea Triennale in Matematica, 2° semestre

Numero crediti: 6

CONTENUTI DEL CORSO:

Meccanica Newtoniana: sistemi meccanici, quantità dinamiche principali, equazioni cardinali, moti relativi, velocità angolare. Sistemi vincolati: vincoli olonomi e anolonomi, vincoli ideali. Il corpo rigido: cinematica rigida, operatore di inerzia, assi e momenti principali di inerzia.

Meccanica Lagrangiana: principio di D'Alembert, equazioni di Eulero-Lagrange, lagrangiane equivalenti, invarianza per cambiamento di coordinate, integrali primi e simmetrie, teorema di Noether, riduzione di Routh. Equilibri e stabilità: configurazioni di equilibrio, teorema di Lagrange-Dirichlet, piccole oscillazioni, frequenze proprie e modi normali. Angoli di Eulero e formulazione lagrangiana per il moto dei corpi rigidi.

TESTI DI RIFERIMENTO:

1. G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli: *Appunti di Meccanica Razionale*
2. G. F. Gronchi: *Note del corso di Meccanica Razionale*

OBIETTIVI FORMATIVI: Il corso si propone di presentare gli argomenti principali della Meccanica Classica, nella sua formulazione newtoniana e lagrangiana.

PREREQUISITI: Nozioni di calcolo differenziale ed integrale.

METODI DIDATTICI: Il corso consiste di 48 ore suddivise tra lezioni ed esercitazioni.

MODALITÀ di VERIFICA dell'APPRENDIMENTO: prova scritta e orale; ci saranno inoltre due prove scritte *in itinere* (compitini) che permetteranno l'accesso diretto alla prova orale.

Qualche appunto sui metodi topologici in calcolo delle variazioni

per gli studenti del terzo anno del corso di laurea in matematica

a.a. 2013-14

Antonio Marino

1 Il lemma di deformazione

L'introduzione dei metodi topologici nel "calcolo delle variazioni" ha dotato questa teoria di uno strumento molto potente. Nello studio di un funzionale il problema di dimostrare, e prima ancora di congetturare, l'esistenza di punti stazionari diversi da quelli di minimo o massimo, e di valutare la loro eventuale molteplicità, trova nell'analisi della struttura topologica "globale" degli insiemi il proprio naturale strumento di indagine. Evidentemente occorre che il funzionale abbia un grado di regolarità che permetta ad esempio di parlare dei suoi punti stazionari e come vedremo ci basterà poco di più per realizzare il collegamento fra topologia e punti stazionari.

In particolare, per un funzionale $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definito su un certo "spazio" X (ad es. $\mathbb{R}^N$, spazio di Hilbert, varietà riemanniana o altro) e dotato di un minimo di regolarità, un tipico dato rivelatore è la struttura topologica dei "sottolivelli" di f , e cioè degli insiemi $f^c = \{u \in X \mid f(u) \leq c\}$, con c in $\mathbb{R}$. Il fatto chiave è in sostanza il seguente:

se due sottolivelli f^a e f^b di f , con ad es. $a < b$, hanno diversa struttura topologica, in un senso abbastanza generale che preciseremo, allora deve esistere un punto u in X che è stazionario per f , con $a \leq f(u) \leq b$.

Il ponte fra l'analisi della topologia dei sottolivelli e l'esistenza dei punti stazionari è costituito da un semplicissimo "lemma di deformazione". Qui di seguito ne vediamo una versione classica, ma esso è presente, in modo palese o nascosto, anche nelle formulazioni più sofisticate della teoria.

Consideriamo dunque un funzionale $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , dove X è uno spazio di Hilbert o più in generale, una varietà riemanniana, che noi supporremo di classe C^2 , completa e priva di bordo, di dimensione finita o infinita.

Richiamiamo per completezza le seguenti note definizioni.

1.1 Definizione Diciamo che un elemento u di X è un punto stazionario (o “critico”) per (di) f se $\text{grad}f(u) = 0$. Il numero $f(u)$ è detto valore critico, o livello critico, per (di) f . I numeri reali che non sono valori critici per f sono detti valori regolari per f .

La seguente condizione assicura una proprietà di compattezza sufficiente ad un agevole svolgimento della teoria.

1.2 Definizione (La “condizione di Palais - Smale”)

Dato c in $\mathbb{R}$ diciamo che vale per f la condizione $(PS)_c$ se ogni successione $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ in X tale che

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} f(u_h) = c \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \text{grad}f(u_h) = 0$$

ammette una sottosuccessione convergente in X .

1.3 Osservazione Se per il funzionale f vale la $(PS)_c$ per ogni c di un intervallo $[a, b]$ che non contiene valori critici di f , allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\inf \{ \|\text{grad}f(u)\| \mid u \in X, a - \varepsilon \leq f(u) \leq b + \varepsilon \} > 0.$$

DIMOSTRAZIONE Se la tesi non fosse vera esisterebbe una successione $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ in X tale che $\|\text{grad}f(u_h)\| \rightarrow 0$ e, passando se occorre ad una sottosuccessione, tale che $f(u_h)$ tenda a un numero c in $[a, b]$. Allora, per la $(PS)_c$, possiamo anche supporre che $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ converga ad un punto u di X . Dunque $f(u) = c$, $c \in [a, b]$ e $\text{grad}f(u) = 0$, contro l'ipotesi. $\square$

È facile dimostrare la seguente osservazione.

1.4 Osservazione Supponiamo che valga per f la condizione $(PS)_c$, per ogni c di un intervallo $[a, b]$. Allora l'insieme dei punti critici u per f tali che $f(u) \in [a, b]$ è compatto, e quindi l'insieme dei corrispondenti valori critici è chiuso.

Nel lemma di deformazione che ora esponiamo si assume l'ipotesi che f sia di classe C^1 , ma per semplicità ne svolgiamo la dimostrazione nel caso che f sia di classe C^2 . Nel caso infatti che f sia solo di classe C^1 c'è bisogno di qualche piccolo accorgimento tecnico (vedi il commento che segue la dimostrazione del lemma) che per questo corso non è molto interessante.

1.5 Lemma (Il “primo lemma di deformazione”)

Siano a e b due numeri reali con $a \leq b$ e supponiamo che:

- a) in $[a, b]$ non cadano valori critici di f ,
- b) valga la $(PS)_c$ per ogni c in $[a, b]$.

Allora f^a è retracts di deformazione¹ di f^b in f^b (e quindi in X).

Si può anzi affermare che se $\varepsilon \geq 0$ e $\delta \geq 0$ sono abbastanza piccoli, allora $f^{a-\varepsilon}$ è retracts di deformazione di $f^{b+\delta}$ in $f^{b+\delta}$.

DIMOSTRAZIONE

I passo) Per l'osservazione 1.3 esiste $\sigma > 0$ tale che $\|\text{grad}f(u)\| \geq \sigma$ per ogni u tale che $a - \sigma \leq f(u) \leq b + \sigma$. Dati allora ε e δ in $[0, \sigma]$, per brevità poniamo: $a' = a - \varepsilon$ e $b' = b + \delta$.

II passo Supponiamo dunque che f sia di classe C^2 . Dobbiamo verificare che esiste una mappa $\mathcal{H} : [0, 1] \times f^{b'} \rightarrow f^{b'}$, che sia continua e abbia le proprietà: $\mathcal{H}(0, u) = u$ e $\mathcal{H}(1, u) \in f^{a'}$, per ogni u di $f^{b'}$, e inoltre $\mathcal{H}(t, u) = u$ per ogni t e per ogni u di $f^{a'}$.

Per le u tali che $a' \leq f(u) \leq b'$ vogliamo costruire la $\mathcal{H}(t, u)$ mediante le soluzioni del seguente problema di Cauchy:

$$1.5.1 \quad \mathcal{U}' = -\frac{\text{grad}f(\mathcal{U})}{\|\text{grad}f(\mathcal{U})\|^2}, \quad \mathcal{U}(0) = u,$$

dove $\text{grad}f(\mathcal{U})$ sta per $(\text{grad}f) \circ \mathcal{U}$.

Notiamo subito che per tutte le u con $a' \leq f(u) \leq b'$, vale per 1.5.1 il teorema di esistenza e unicità locale, perché la funzione $-\frac{\text{grad}f(u)}{\|\text{grad}f(u)\|^2}$ è di classe C^1 in $\{u \in X \mid \text{grad}f(u) \neq 0\}$. Dunque esiste $\rho > 0$ ed esiste una unica $\mathcal{U} : [0, \rho[\rightarrow X$ che verifica 1.5.1 in $[0, \rho[$.

III passo) Vediamo ora che se $a' \leq f(u) \leq b'$ allora la soluzione $\mathcal{U}$ giunge in $f(a')$. Notiamo che risulta: $(f \circ \mathcal{U})' = -1$, e dunque dobbiamo verificare che $\mathcal{U}$ è definita in tutto l'intervallo $[0, f(u) - a']$.

Consideriamo perciò l'intervallo I , massimale fra quelli nei quali la soluzione $\mathcal{U}$ è definita. È ben noto che tale intervallo esiste. Se $\sup I > f(u) - a'$ è vero che $[0, f(u) - a'] \subseteq I$.

Supponiamo invece che $\sup I \leq f(u) - a'$ e cominciamo col verificare che I ha massimo. Infatti ora risulta che per tutte le t di $[0, \sup I[$, $a' \leq f(\mathcal{U}(t)) \leq b'$ e d'altra parte $\|\mathcal{U}'(t)\| \leq \frac{1}{\|\text{grad}f(\mathcal{U}(t))\|}$. Dunque $\|\mathcal{U}'(t)\|$ è limitata per le proprietà dei numeri a' e b' introdotti nel I passo.

Di conseguenza se t tende a $\sup I$ la curva $\mathcal{U}(t)$ converge ad un punto v di X e quindi anche $\mathcal{U}'(t)$ converge, perché verifica l'equazione che figura in 1.5.1. Dunque la $\mathcal{U}$ può essere estesa in modo differenziabile a tutto $[0, \sup I]$. Dalla definizione di I segue allora che $\sup I \in I$.

¹Se Y è uno spazio topologico e Z è un suo sottospazio, allora una retrazione $r : Y \rightarrow Z$ è una mappa continua tale che $r(x) = x$ per ogni x di Z . Se inoltre X è uno spazio topologico tale che $Z \subseteq Y \subseteq X$, si dice che Z è in X un retracts di deformazione di Y se esiste una retrazione r di Y in Z che sia omotopa in X all'immersione $i : Y \rightarrow X$, nel senso che esiste una mappa continua $\mathcal{H} : [0, 1] \times Y \rightarrow X$ tale che $\mathcal{H}(0, x) = x$ e $\mathcal{H}(1, x) \in Z$ per ogni x di Y e anche $\mathcal{H}(1, x) = x$ per ogni x di Z .

Se per assurdo $\max I < f(u) - a'$, allora $a' < f(\max I) < b'$ e dunque si può estendere la $\mathcal{U}$ mediante la soluzione $\mathcal{V}$ della stessa equazione che figura nel problema 1.5.1, ma con la condizione $\mathcal{V}(\max I) = \mathcal{U}(\max I)$. Ma anche questo contraddice la definizione di I . In conclusione $[0, f(u) - a'] \subseteq I$.

IV passo) A questo punto, mediante la soluzione $\mathcal{U}$ di 1.5.1, possiamo senz'altro definire l'omotopia $\mathcal{H}$ per tutte le coppie (t, u) di $[0, 1] \times f^{b'}$ nel seguente modo:

$$\mathcal{H}(t, u) = \begin{cases} \mathcal{U}(t(f(u) - a')) & \text{se } a' \leq f(u) \leq b', \\ u & \text{se } f(u) \leq a'. \end{cases}$$

Dai consueti teoremi sulla dipendenza continua dai dati iniziali per sistemi del tipo 1.5.1, segue che $\mathcal{H}$ è continua. Le altre proprietà richieste per $\mathcal{H}$ sono a questo punto evidenti. $\square$

Nel caso che f sia solo di classe C^1 si può procedere sostituendo anzitutto il campo $\text{grad} f$ con un campo F che gli sia uniformemente vicino e sia di classe C^2 . Infatti, per il procedimento appena seguito non occorre che il vettore $\mathcal{U}'(t)$ sia orientato esattamente come $-\text{grad} f(\mathcal{U}(t))$, ma basta che sia uniformemente concorde con questo. Se X è una varietà riemanniana, per non avere altre grane occorre naturalmente che questa sia comunque di classe C^2 .

Vedremo nel seguito come il lemma di deformazione gioca nella dimostrazione di alcuni importanti teoremi riguardanti i punti stazionari di un funzionale f . Intanto possiamo già qui osservare come questo lemma permette di provare l'esistenza di un punto di minimo per f in ipotesi che sono un po' inconsuete. È interessante il fatto che queste ipotesi non richiedono la condizione classica che impone che qualche sottolivello di f sia compatto relativamente ad una opportuna topologia.

1.6 Teorema (Un inconsueto teorema di minimo)

Supponiamo che f sia inferiormente limitato e che valga la $(PS)_c$ almeno per $c = \inf f$. Allora f ha minimo.

DIMOSTRAZIONE Se per assurdo $\inf f$ non fosse valore critico per f , per il lemma 1.5, esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $f^{\inf f - \varepsilon}$ sarebbe un retratto di $f^{\inf f + \varepsilon}$. Ma $f^{\inf f - \varepsilon}$ è vuoto e $f^{\inf f + \varepsilon}$ no. $\square$

Vale evidentemente un analogo teorema di esistenza del massimo, che può essere verificato sostituendo $-f$ a f .

2 % Il metodo del minimassimo

I teoremi che provano l'esistenza di un livello critico per un certo funzionale $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, possono, come vedremo, essere inquadrati nello schema logico semplice e generale del “metodo del minimassimo”. Per semplicità didattica noi esporremo preferibilmente una dimostrazione diretta di quei teoremi, mettendo in evidenza le proprietà topologiche in gioco. Subito dopo, ancora per motivi didattici, riesamineremo daccapo le situazioni prospettate dai diversi enunciati e metteremo esplicitamente in evidenza l'interazione fra le proprietà topologiche e il metodo del minimassimo.

Per presentare ora questo metodo in un modo adatto ai successivi teoremi di esistenza, possiamo, a partire da un assegnato funzionale f di classe C^1 sullo “spazio” X , introdurre un numero a_0 in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, e la classe $\mathcal{R}_{f,a_0}$ delle retrazioni di f^b su f^a , omotope all'identità in f^b , al variare di a e b in $\mathbb{R}$, con $a_0 \leq a \leq b$.

2.1 Teorema (Il “metodo del minimassimo”)

Sia $\mathcal{E}$ una classe di sottoinsiemi di X avente la proprietà:

$$\text{per ogni } A \text{ di } \mathcal{E} \text{ e per ogni } r \text{ di } \mathcal{R}_{f,a_0} \text{ anche } r(A) \in \mathcal{E}.$$

Poniamo poi:

$$2.1.1 \quad c = \inf \{ \sup f(A) \mid A \in \mathcal{E} \}.$$

Allora, se $a_0 < c < +\infty$ e se vale la condizione (PS) $_c$, esiste u in X tale che $\text{grad} f(u) = 0$ e $f(u) = c$.

DIMOSTRAZIONE Se per assurdo c non fosse un valore critico per f , per il primo lemma di deformazione esisterebbero $\varepsilon > 0$, con $a_0 < a - \varepsilon$, ed una retrazione r , nella classe $\mathcal{R}_{f,a_0}$, di $f^{c+\varepsilon}$ su $f^{c-\varepsilon}$. Ma dalla definizione di c segue che esiste A in $\mathcal{E}$ tale che $\sup f(A) \leq c + \varepsilon$. Allora $r(A) \in \mathcal{E}$ e $\sup f(r(A)) \leq c - \varepsilon$. Ma questo contraddice la definizione di c . $\square$

Riguardo alla condizione $c < +\infty$, è evidente che essa è verificata se e solo se esiste A in $\mathcal{E}$ tale che $\sup f(A) < +\infty$.

Si osservi poi che il teorema di minimo 1.6 rientra nel teorema appena dimostrato, se si considera $a_0 < \inf f$ (ad esempio $a_0 = -\infty$) e si indica con $\mathcal{E}$ la famiglia dei sottoinsiemi non vuoti di X (oppure la famiglia dei sottoinsiemi di X che hanno uno ed un solo punto).

3 Il teorema della sella

Sia ora X lo spazio $\mathbb{R}^N$ o più in generale uno spazio di Hilbert e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale di classe C^1 . Il teorema della sella si basa sul lemma di deformazione e sulla proprietà topologica espressa nel seguente enunciato.

3.1 Lemma *Siano X_0 e X_1 due sottospazi di X tali che $X = X_0 \oplus X_1$ e supponiamo che X_0 abbia dimensione finita. Dato un numero $R > 0$ poniamo:*

$$S_0 = \{u \in X_0 \mid \|u\| = R\} \text{ e } B_0 = \{u \in X_0 \mid \|u\| < R\}.$$

Allora, data una qualunque mappa continua $\Phi : \overline{B}_0 \rightarrow X$ tale che $\Phi(u) = u$ per ogni u di S_0 risulta che $\Phi(B_0) \cap X_1 \neq \emptyset$.

DIMOSTRAZIONE Sia P_0 la proiezione di X su X_0 tale che $\text{Ker} P_0 = X_1$ e consideriamo la mappa continua $P_0 \circ \Phi$ da $\overline{B}_0$ a X_0 .

Risulta che se $u \in S_0$ allora $P_0 \circ \Phi(u) = u$. Di conseguenza, poiché X_0 ha dimensione finita, sappiamo che $\deg(v, \Phi, B_0(0, R)) = 1$ per ogni v di B_0 . Dunque $B_0 \subseteq P_0 \circ \Phi(B_0)$.

In particolare esiste u in B_0 tale che $0 = P_0 \circ \Phi(u)$ e cioè $\Phi(u) \in X_1$. $\square$

3.2 Teorema (Il “teorema della sella”)

Siano X_0 e X_1 due sottospazi di X tali che $X = X_0 \oplus X_1$. Supponiamo che

a) *esiste $R > 0$ tale che, posto $S_0 = \{u \in X_0 \mid \|u\| = R\}$, risulti*

$$\sup f(S_0) < \inf f(X_1) ,$$

b) *X_0 ha dimensione finita,*

c) *vale la $(PS)_c$ per le c dell'intervallo $[\inf f(X_1), \sup f(B_0)]$, avendo posto $B_0 = \{u \in X_0 \mid \|u\| < R\}$.*

Allora esiste un punto u di X critico per f e tale che

$$\inf f(X_1) \leq f(u) \leq \sup f(B_0).$$

DIMOSTRAZIONE Poniamo $a = \inf f(X_1)$ e $b = \sup f(B_0)$ e supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa. Allora, dal lemma di deformazione segue che esiste $\varepsilon > 0$ ed una retrazione continua r di f^b su $f^{a-\varepsilon}$. Possiamo supporre che ε sia tale che $\sup f(S_0) < \inf f(X_1) - \varepsilon$. Dunque:

$$S_0 \subseteq f^{a-\varepsilon}, \overline{B}_0 \subseteq f^b, f^{a-\varepsilon} \cap X_1 = \emptyset, r : f^b \rightarrow f^{a-\varepsilon} \text{ e } r(u) = u \ \forall u \text{ in } f^{a-\varepsilon}.$$

Consideriamo ora la restrizione Φ di r a $\overline{B}_0$. La mappa $\Phi : \overline{B}_0 \rightarrow X$ è continua ed è tale che

$$\Phi(u) = u \text{ per ogni } u \text{ in } S_0(0, R) \text{ e } \Phi(B_0) \cap X_1 = \emptyset.$$

Ma questo contraddice il lemma 3.1. $\square$

Se ora riconsideriamo il problema alla luce del metodo del “minimassimo”, otteniamo una versione più precisa dell’enunciato e della sua dimostrazione.

3.3 % Teorema (Il teorema della sella e i minimassimi)

Con i simboli del precedente enunciato supponiamo ancora che:

- a) $\sup f(S_0) < \inf f(X_1)$,
 b) X_0 abbia dimensione finita,
 e poniamo

$$c = \inf \{ \sup f(\Phi(\overline{B}_0)) \mid \Phi \in C^0(\overline{B}_0, X), \Phi = Id \text{ su } S_0 \}.$$

Allora:

- a) $\inf f(X_1) \leq c \leq \sup f(B_0)$,
 b) se vale la $(PS)_c$ esiste u in X tale che $\text{grad} f(u) = 0$ e $f(u) = c$.

DIMOSTRAZIONE

- a) $c \leq \sup f(B_0)$ perché in $C^0(\overline{B}_0, \mathbb{R}^N)$ c'è anche l'identità su $\overline{B}_0$. Inoltre $c \geq \inf f(X_1)$ perché per ogni mappa continua $\Phi : \overline{B}_0 \rightarrow \mathbb{R}^N$ risulta che $\Phi(\overline{B}_0) \cap X_1 \neq \emptyset$, grazie al lemma 3.1.
 b) Posto $a_0 = \sup f(S_0)$, la famiglia di insiemi

$$\{\Phi(\overline{B}_0) \mid \Phi \in C^0(\overline{B}_0, X), \Phi = Id \text{ su } S_0\},$$

è evidentemente stabile rispetto all'azione delle retrazioni di $\mathcal{R}_{f,a_0}$, dato che $S_0 \subseteq f^{a_0}$.

Inoltre, per la a) risulta che $a_0 < c$, per dato che per ipotesi $a_0 < \inf f(X_1)$. In conclusione, per 2.1, c è un valore critico per f . $\square$

4 Il teorema del passo di montagna

Il teorema del passo di montagna prende in esame una situazione molto frequente nello studio dei problemi differenziali non lineari. Questo teorema fa uso, naturalmente mediante il lemma di deformazione 1.5, di una proprietà topologica del tutto elementare, e cioè del fatto che una mappa continua trasforma insiemi connessi in insiemi connessi.

4.1 Teorema (Il “teorema del passo di montagna”)

Supponiamo che

- a) esistano in X due punti u_0 e u_1 ed una sfera $S = \{u \in X \mid \|u\| = R\}$, per un certo $R > 0$, tali che

$$\|u_0\| < R, \|u_1\| > R, f(u_0) < \inf f(S), f(u_1) < \inf f(S),$$

- b) valga la condizione $(PS)_c$ per le c dell'intervallo $[\inf f(S), \sup f \circ \gamma]$, dove $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ è una fissata curva continua che congiunge u_0 con u_1 .

Allora esiste un punto u di X critico per f e tale che

$$\inf f(S) \leq f(u) \leq \sup f \circ \gamma.$$

DIMOSTRAZIONE Se la tesi non fosse vera, posto $a = \inf f(S)$ e $b = \sup f \circ \gamma$, esisterebbe un $\varepsilon > 0$ tale che $f(u_1) < a - \varepsilon$ ed $f(u_2) < a - \varepsilon$ ed una retrazione r di f^b su $f^{a-\varepsilon}$. Ma in questo caso l'insieme $r \circ \gamma([0, 1])$ non è connesso perché contiene u_0 e u_1 ma non interseca S . Questo è assurdo perché $\gamma([0, 1])$ è connesso. $\square$

Vale evidentemente la seguente affermazione.

4.2 Osservazione *Supponiamo che valgano le ipotesi a) del teorema 4.1.*

a) *Posto $B = \{u \in X \mid \|u\| < R\}$, se $\inf f(B) > -\infty$ e se vale la $(PS)_c$ per ogni c con $\inf f(B) \leq c \leq \inf f(S)$ allora f ha minimo in B (e questo livello critico è diverso da quello considerato nel precedente teorema).*

b) *se $\inf f(X \setminus B) > -\infty$ e se vale la $(PS)_c$ per tutti i livelli c tali che $\inf f(X \setminus B) \leq c \leq \inf f(S)$ allora f ha minimo in $X \setminus B$ (e questo punto critico è diverso dai due precedenti).*

La seguente versione con i minimassimi del teorema del passo di montagna è del tutto spontanea e può essere dimostrata per esercizio.

4.3 % Teorema (Il passo di montagna e i minimassimi)

Supponiamo che esistano in X una sfera $S = \{u \in X \mid \|u\| = R\}$, per un certo $R > 0$, e due punti u_0 e u_1 , tali che

$$\|u_0\| < R, \|u_1\| > R, f(u_0) < \inf f(S), f(u_1) < \inf f(S),$$

e poniamo $c = \inf \{\sup f \circ \gamma \mid \gamma \in C^0(0, 1; X), \gamma(0) = u_0, \gamma(1) = u_1\}$.

Allora:

a) $\inf f(S) \leq c$,

b) *se vale $(PS)_c$ allora c è valore critico per f .*

5 Il teorema di allacciamento

Si può dire che il teorema di allacciamento o “linking” estende il teorema del passo di montagna passando da una situazione molto semplice dal punto di vista topologico ad una più complessa ma analoga a quella. Potremo infatti renderci conto che lo schema generale è in sostanza lo stesso.

Cominciamo con un lemma che mette in evidenza in le proprietà topologiche che sono alla base di questo teorema. In esso si considerano due sottospazi X_0 e X_1 di uno spazio di Hilbert X tali che $X = X_0 \oplus X_1$, un elemento non nullo e di X_0 , e i seguenti insiemi:

$$B_0 = \{u \in X_0 \mid \|u\| < \rho_0\},$$

$$S_0 = \{u \in X_0 \mid \|u\| = \rho_0\},$$

$$B_1 = \{u \in \text{span}(e) \oplus X_1 \mid \|u - e\| < \rho_1\},$$

$$S_1 = \{u \in \text{span}(e) \oplus X_1 \mid \|u - e\| = \rho_1\}.$$

5.1 Lemma *Supponiamo che:*

a) le sfere S_0 e S_1 siano “allacciate”, e cioè che valga la condizione

$$5.1.1 \quad -\rho_0 < \|e\| - \rho_1 < \rho_0 < \|e\| + \rho_1.$$

b) X_0 abbia dimensione finita.

Allora:

a) per ogni mappa continua $\Phi : \bar{B}_0 \rightarrow X$ tale che $\Phi(u) = u$ per ogni u di S_0 , risulta che $\Phi(B_0) \cap S_1 \neq \emptyset$,

b) per ogni mappa continua (omotopia) $\mathcal{H} : [0, 1] \times S_0 \rightarrow X$ con le proprietà

$$\mathcal{H}(0, u) = u, \quad \mathcal{H}(t, u) \notin S_1, \quad \text{per ogni } u \text{ in } S_0 \text{ e per ogni } t \text{ in } [0, 1],$$

risulta che $\mathcal{H}(1, S_0) \cap B_1 \neq \emptyset$.

È utile premettere alla dimostrazione di questo lemma una osservazione ovvia ma utilissima.

5.2 Osservazione *Se nel lemma precedente si sostituiscono lo spazio X con uno spazio topologico X' e gli insiemi B_0, S_0, B_1 e S_1 con quattro sottoinsiemi B'_0, S'_0, B'_1 e S'_1 di X' , e se esiste un omeomorfismo di X in X' che trasforma (nell'ordine) questi ultimi insiemi nei precedenti, allora la tesi continua evidentemente a valere.*

5.3 Dimostrazione del lemma 5.1

I passo) Grazie alla precedente osservazione possiamo supporre che X_0 e X_1 siano spazi ortogonali, e che $\|e\| \geq \rho_0$.

Sia Q la proiezione ortogonale su $\text{span}(e) \oplus X_1$ e poniamo $P = Id - Q$. Di conseguenza $P(X) = \text{Ker} Q$ e dunque $P(X)$ è ortogonale al vettore e e $P(X) \oplus \text{span}(e) = X_0$.

Consideriamo ora la mappa $\Psi : X \rightarrow X_0$ così definita:

$$\Psi(u) = P(u) + (\|e\| - \|Q(u) - e\|) \frac{e}{\|e\|}, \text{ per ogni } u \text{ di } X.$$

e poniamo $y_0 = (\|e\| - \rho_1) \frac{e}{\|e\|}$.

Osserviamo che $y_0 \in B_0$, dato che per ipotesi $-\rho_0 < \|e\| - \rho_1 < \rho_0$. Riguardo alla Ψ ci interessano le seguenti sue proprietà:

$$5.3.1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{se } u \in S_0 \text{ allora } \Psi(u) = u, \\ \text{se } u \in X \text{ e } \Psi(u) = \lambda \frac{e}{\|e\|}, \text{ allora } P(u) = 0 \text{ e } \|u - e\| = \|e\| - \lambda. \\ \quad \text{In particolare:} \\ \text{se } u \in X \text{ e } \Psi(u) = \lambda \frac{e}{\|e\|}, \text{ allora } \lambda \leq \|e\|, \\ \text{se } u \in X \text{ e se } \Psi(u) = y_0, \text{ allora } u \in S_1. \end{array} \right.$$

Infatti, se $u \in \bar{B}_0$ allora esiste λ reale tale che $u = P(u) + \lambda e$, $Q(u) = \lambda e$ e $\|Q(u)\| \leq \rho_0$. Dunque $|\lambda| \leq 1$ perché $\rho_0 \geq \|\lambda e\| = |\lambda| \|e\| \geq |\lambda| \rho_0$. Di conseguenza:

$$\begin{aligned}\Psi(u) &= P(u) + (\|e\| - \|\lambda e - e\|) \frac{e}{\|e\|} = P(u) + (\|e\| - |\lambda - 1| \|e\|) \frac{e}{\|e\|} = \\ &= P(u) + (\|e\| - (1 - \lambda)\|e\|) \frac{e}{\|e\|} = P(u) + \lambda e = u.\end{aligned}$$

Se poi $\Psi(u) = \lambda \frac{e}{\|e\|}$ per un certo u di X , allora $P(u) = 0$, e cioè $u = Q(u)$, $u \in X_1 \oplus \text{span}(e)$ e inoltre $\|e\| - \|u - e\| = \lambda$.

II passo) Per dimostrare la **a)** consideriamo la mappa $\tilde{\Phi} = \Psi \circ \Phi : \bar{B}_0 \rightarrow X_0$. Se $u \in S_0$ allora $\tilde{\Phi}(u) = \Psi \circ \Phi(u) = \Psi(u) = u$, per la prima delle proprietà 5.3.1. Di conseguenza $\deg(y_0, \tilde{\Phi}, B_0) = 1$ e dunque esiste u in B_0 tale che $\tilde{\Phi}(u) = y_0$. Allora, per l'ultima delle proprietà 5.3.1, $\Phi(u) \in S_1$.

III passo) Per la **b)** consideriamo l'omotopia $\tilde{\mathcal{H}} = \Psi \circ \mathcal{H} : [0, 1] \times S_0 \rightarrow X_0$. Dalle proprietà di Ψ e di $\mathcal{H}$ segue evidentemente che $\tilde{\mathcal{H}}(0, u) = u$ per ogni u e $y_0 \neq \tilde{\mathcal{H}}(t, u)$ per ogni (t, u) . Di conseguenza $\deg(y_0, \tilde{\mathcal{H}}(1, \cdot), B_0) = 1$.

D'altra parte dalle ipotesi segue che il punto $y_1 = (\|e\| + \rho_1) \frac{e}{\|e\|}$ non sta in $\bar{B}_0$. Inoltre $\tilde{\mathcal{H}}(t, u) \neq y_1$ per ogni (t, u) di $[0, 1] \times S_0$ perché $y_1 \notin \Psi(X)$, per la penultima delle 5.3.1. Dunque $\deg(y_1, \tilde{\mathcal{H}}(1, \cdot), B_0) = 0$.

Se ne deduce che esistono α_0 in $]\|e\| - \rho_1, \|e\| + \rho_1[$ e u in S_0 tali che $\alpha_0 \frac{e}{\|e\|} = \tilde{\mathcal{H}}(1, u)$. Dalla seconda delle 5.3.1 segue allora che $P(\mathcal{H}(1, u)) = 0$ e $\|\mathcal{H}(1, u) - e\| = \|e\| - \alpha_0 < \rho_1$. Cioè $\mathcal{H}(1, u) \in B_1$. $\square$

Possiamo ora esporre e provare il teorema di allacciamento.

5.4 Teorema (Il “teorema di allacciamento”)

Supponiamo che:

a) $-\rho_0 < \|e\| - \rho_1 < \rho_0 < \|e\| + \rho_1$

b) $\sup f(S_0) < \inf f(S_1),$

c) X_0 ha dimensione finita.

Allora:

a) se vale la (PS)c per ogni c di $[\inf f(S_1), \sup f(B_0)]$, in tale intervallo esiste un livello critico per f ,

b) se $\inf f(B_1) > -\infty$ e se vale (PS)c per le c di $[\inf f(B_1), \sup f(S_0)]$, in tale intervallo esiste un livello critico per f .

DIMOSTRAZIONE

Per la **a)** poniamo $a = \inf f(S_1)$ e $b = \sup f(B_0)$. Supponiamo per assurdo che la tesi non valga. In questa ipotesi, per il lemma di deformazione 1.5, esistono un $\varepsilon > 0$ con $a < b - \varepsilon$, ed una retrazione r di f^b su $f^{a-\varepsilon}$. Allora

$\overline{B}_0 \subseteq f^b$, $S_0 \subseteq f^{a-\varepsilon}$ e $f^{a-\varepsilon} \cap S_1 = \emptyset$. Allora la restrizione Φ di r a $\overline{B}_0$ è tale che $\Phi(u) = u$ per ogni u di S_0 e però $\Phi(B_0) \cap S_1 = \emptyset$, in contraddizione con la tesi **a)** del lemma 5.1.

Per la **b)** poniamo $a' = \inf f(B_1)$ e $b' = \sup f(S_0)$ e assumiamo per assurdo l'ipotesi che la tesi non valga. Allora, per il lemma di deformazione 1.5, esistono $\varepsilon > 0$ ed una omotopia $\mathcal{H} : [0, 1] \times f^{b'} \rightarrow f^{b'}$, con le proprietà: $\mathcal{H}(0, u) = u$ per ogni u , $\mathcal{H}(1, u) \in f^{a'-\varepsilon}$ per ogni u e $\mathcal{H}(1, u) = u$ per ogni u di $f^{a'-\varepsilon}$. D'altra parte $S_0 \subseteq f^{b'}$, $f^{b'} \cap S_1 = \emptyset$ e $f^{a'-\varepsilon} \cap \overline{B}_1 = \emptyset$.

Dunque la restrizione $\tilde{\mathcal{H}}$ di $\mathcal{H}$ a $[0, 1] \times S_0$ ha le proprietà: $\tilde{\mathcal{H}}(0, u) = u$ per ogni u , $\tilde{\mathcal{H}}(t, u) \notin S_1$ per ogni (t, u) , $\mathcal{H}(1, S_0) \cap B_1 = \emptyset$, in contraddizione con la **b)** del lemma 5.1. $\square$

Anche di questo enunciato possiamo dare una versione con i minimassimi e ne lasciamo al lettore la semplice dimostrazione. Naturalmente occorre servirsi del lemma di deformazione e del lemma 5.1.

5.5 % Teorema (Il teorema di allacciamento e i minimassimi)

Assumiamo le seguenti ipotesi:

$$\mathbf{a)} \quad -\rho_0 < \|e\| - \rho_1 < \rho_0 < \|e\| + \rho_1$$

$$\mathbf{b)} \quad \sup f(S_0) < \inf f(S_1),$$

c) X_0 ha dimensione finita.

Allora:

a) posto $c = \inf \{ \sup f \circ \Phi(B_0) \mid \Phi \in C^0(\overline{B}_0, X), \Phi(u) = u \text{ se } u \in S_0 \}$,

risulta che $\inf f(S_1) \leq c \leq \sup f(B_0)$,

e se per tale c vale la $(PS)_c$ allora c è valore critico per f ;

b) posto $c = \inf \{ \sup f \circ \Phi(S_0) \mid \Phi \in C^0(S_0, X), \Phi \text{ omotopa a } Id \text{ in } f^{c_0} \}$,

dove $c_0 = \sup f(S_0)$,

risulta che $\inf f(B_1) \leq c \leq \sup f(S_0)$,

e se $c > -\infty$ e vale la $(PS)_c$ allora c è valore critico per f . $\square$

Grazie all'osservazione 5.2 è evidente che anche nel teorema di allacciamento conta solo la struttura topologica degli insiemi in gioco.

5.6 Osservazione Se nel teorema di allacciamento 5.4 si sostituiscono gli insiemi B_0, S_0, B_1 e S_1 con quattro sottoinsiemi B'_0, S'_0, B'_1 e S'_1 di X , ed esiste un omeomorfismo di X in X che trasforma (nell'ordine) questi ultimi insiemi nei precedenti, allora la tesi continua evidentemente a valere.

6 Un secondo lemma di deformazione

Nei paragrafi successivi ci soffermeremo un poco su un punto di vista, in un certo senso complementare rispetto a quello adottato fin qui. Noi metteremo in relazione la struttura globale della varietà sulla quale un funzionale f è definito, con alcune caratteristiche di f e con il numero dei suoi punti stazionari. Considereremo in particolare due diversi casi. Per questo studio ci occorrerà un secondo lemma di deformazione.

Consideriamo di nuovo un funzionale $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , dove X è uno spazio di Hilbert o più in generale, una varietà riemanniana di classe C^2 , completa e priva di bordo, di dimensione finita o infinita.

6.1 Il “secondo lemma di deformazione”

Dato c in $\mathbb{R}$ sia Z_c l'insieme dei punti critici u di f con $f(u) = c$ e sia V un intorno aperto di Z_c .

Allora, se per tale c vale la $(PS)_c$, esistono $\varepsilon > 0$ ed una mappa continua $\mathcal{H} : [0, 1] \times (f^{c+\varepsilon} \setminus V) \rightarrow f^{c+\varepsilon}$, con le proprietà:

$$\mathcal{H}(0, u) = u \quad \text{e} \quad \mathcal{H}(1, u) \in f^{c-\varepsilon}, \quad \text{per ogni } u \text{ di } f^{c+\varepsilon} \setminus V.$$

DIMOSTRAZIONE Limitiamoci e dimostrare il lemma nell'ipotesi che f sia di classe C^2 .

I passo) Sia U un intorno aperto di Z_c con le proprietà:

$$\overline{U} \subseteq V \quad \text{e} \quad \inf \{|u - v| \mid u \in X \setminus V, v \in U\} = \delta > 0.$$

È facile vedere che esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$\inf \{ \|\text{grad} f(u)\| \mid u \in X \setminus U, f(u) \in [c - \varepsilon_0, c + \varepsilon_0] \} = \sigma > 0.$$

Infatti, se non fosse vero esisterebbe una successione $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ in $X \setminus U$ tale che $\|\text{grad} f(u_h)\| \rightarrow 0$ e $f(u_h) \rightarrow c$. Allora, per la $(PS)_c$, una sottosuccessione di $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ convergerebbe ad un punto critico u dell'insieme chiuso $X \setminus U$, con $f(u) = c$. Ma questo è assurdo.

II passo) Vediamo ora che se ε è un numero tale che $0 < 2\varepsilon < \delta\sigma$ e $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, allora, per ogni u di $f^{c+\varepsilon} \setminus V$ con $f(u) \geq c - \varepsilon$, la soluzione $\mathcal{U}(t)$ del problema:

$$6.1.1 \quad \mathcal{U}' = - \frac{\text{grad} f(\mathcal{U})}{\|\text{grad} f(\mathcal{U})\|^2}, \quad \mathcal{U}(0) = u.$$

(che abbiamo già incontrato nella dimostrazione del primo lemma di deformazione) è definita in tutto l'intervallo $[0, f(u) - (c - \varepsilon)]$. Per questo basta mostrare che per le t di tale intervallo $\mathcal{U}(t)$ non entra in U , e per il resto si può procedere con le considerazioni standard già usate in 1.5. Infatti se questa affermazione fosse falsa esisterebbe un primo istante t , con

$0 < t \leq f(u) - (c - \varepsilon)$, tale che $\mathcal{U}(t) \in \overline{U}$. Ma nell'intervallo $[0, t]$ la lunghezza della curva non è sufficiente a coprire la distanza da u (che non sta in V) a U perché

$$\int_0^t |\mathcal{U}'(\tau)| \, d\tau = \int_0^t \frac{1}{\|\text{grad} f(\mathcal{U}(\tau))\|} \, d\tau \leq \frac{1}{\sigma} (f(u) - (c - \varepsilon)) \leq \frac{1}{\sigma} 2\varepsilon < \delta.$$

Il passo) Basta ora osservare che se $u \in f^{c+\varepsilon} \setminus V$ e $f(u) \geq c - \varepsilon$ la soluzione $\mathcal{U}$ di 6.1.1 è tale che $f \circ \mathcal{U}(t) = f(u) - t$. Per la tesi è ora sufficiente definire $\mathcal{H} : [0, 1] \times f^{c+\varepsilon} \setminus V \rightarrow f^{c+\varepsilon}$ nel seguente modo

$$\mathcal{H}(t, u) = \mathcal{U}(t (f(u) - (c - \varepsilon))^+). \quad \square$$

6.2 % Osservazione *Il lemma precedente può essere così precisato: se $c \in \mathbb{R}$, se V è un intorno di Z_c e se vale $(PS)_c$, esistono $\varepsilon > 0$ ed una mappa continua $\mathcal{H} : [0, 1] \times ((f^{c+\varepsilon} \setminus V) \cup f^{c-\varepsilon}) \rightarrow f^{c+\varepsilon}$, con le proprietà:*

$$\mathcal{H}(0, u) = u \quad e \quad \mathcal{H}(1, u) \in f^{c-\varepsilon}, \quad \text{per ogni } u \text{ di } f^{c+\varepsilon} \setminus V$$

$$e \quad \mathcal{H}(t, u) = u \quad \text{per ogni } u \text{ di } f^{c-\varepsilon} \text{ e per ogni } t.$$

7 Il genere

Abbiamo visto che con la teoria del grado viene assegnato un numero naturale alle mappe continue $\Phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$, dove Ω è un sottoinsieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^N$, rispetto ai punti y di $\mathbb{R}^N$.

Anche agli spazi topologici, come è noto, si possono associare numeri interi, o successioni di numeri interi (o più in generale successioni di gruppi). Una situazione tipica di questo genere si presenta quando si vuole dare un indice della “complessità topologica” di uno spazio, per distinguere per esempio le proprietà topologiche della palla, da quelle della sfera e queste da quelle del toro. Per questo sono state formulate appropriate e belle teorie, come la teoria dell’homologia, della cohomologia, dell’omotopia, eccetera.

Nel cosiddetto calcolo delle variazioni la complessità della struttura di uno spazio topologico riveste un’importanza cruciale. Se infatti si considera una funzione reale f definita su uno spazio X , e si assumono alcune ipotesi abbastanza naturali su f e su X allora il numero dei punti stazionari (o critici) di f è collegato alla complessità di X , nel senso che, *quale che sia* f , nel quadro delle ipotesi della teoria è possibile dare una valutazione per difetto del numero dei punti stazionari di f che cresce con la complessità di X . Le teorie che prendono in esame questo tipo di problemi sono varie, e ne vedremo alcune.

Qui vogliamo cominciare considerando uno dei procedimenti che considerano uno spazio topologico dotato di una certa simmetria e proprio in relazione a questa assegnano allo spazio un certo numero intero. Questo approccio è molto utile in alcune situazioni molto interessanti, nelle quali anche il funzionale definito sullo spazio presenta una simmetria che si accorda con quella dello spazio.

Il caso più semplice, che tuttavia conduce a risultati famosi e sorprendenti, è quello della “simmetria antipodale”. È questa la situazione alla quale ora ci dedichiamo.

• La definizione di genere e alcune proprietà

Consideriamo uno spazio normato E , e denotiamo con Γ la classe dei sottoinsiemi A di $E \setminus \{0\}$ che sono chiusi in E (basterebbe che siano chiusi in $E \setminus \{0\}$) e tali che se $u \in A$ anche $-u \in A$.

7.1 Definizione

Se $A \in \Gamma$ e $A \neq \emptyset$ diciamo “genere” di A , e denotiamo con $\gamma(A)$, il minimo intero naturale k tale che esista una mappa $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ continua e dispari. Se tale k non esiste poniamo $\gamma(A) = +\infty$.

Se $A = \emptyset$ poniamo $\gamma(A) = 0$.

Naturalmente la definizione ora data non cambia se si impone che la mappa Φ sia a valori nella sfera S^{k-1} di $\mathbb{R}^k$: basta eventualmente comporre le Φ con la retrazione $\pi : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \rightarrow S^{k-1}$ definita da $\pi(x) = \frac{x}{|x|}$.

Indicheremo con $||$ un assegnato modulo in $\mathbb{R}^k$.

Vediamo subito alcune proprietà della mappa $\gamma : \Gamma \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ che giocano un ruolo chiave nel “calcolo delle variazioni non lineare”.

7.2 Proposizione Alcune proprietà del genere

- a) Se $A \in \Gamma$ allora $\gamma(A) = 0$ se e solo se $A = \emptyset$.
- b) Siano A e B insiemi di Γ . Se $\Phi : A \rightarrow B$ è una mappa continua e dispari allora $\gamma(A) \leq \gamma(B)$. In particolare, se $A \subseteq B$ allora $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.
- c) Se A e B stanno in Γ allora $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$.
- d) Se $A \in \Gamma$ esiste un intorno aperto U di A tale che: se $u \in U$ allora $-u \in U$ e $0 \notin \bar{U}$ (dunque $\bar{U} \in \Gamma$) e $\gamma(\bar{U}) = \gamma(A)$.

DIMOSTRAZIONE La a) è evidente. Per la b) basta osservare che se per un certo k in $\mathbb{N}$ esiste una mappa $\Psi : B \rightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ continua e dispari, allora $\Psi \circ \Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ è una mappa continua e dispari.

Par la c) supponiamo che, per certi numeri h e k in $\mathbb{N}$, esistano due mappe $\Phi_1 : A \rightarrow \mathbb{R}^h \setminus \{0\}$ e $\Phi_2 : B \rightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ continue e dispari e indichiamo con $\tilde{\Phi}_1 : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}^h$ e $\tilde{\Phi}_2 : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}^k$ le rispettive estensioni continue e dispari (esistono perché A e B sono chiusi). Allora resta definita la mappa $\Phi = (\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2) : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k$. Φ è continua e dispari e inoltre per ogni u di $A \cup B$ risulta che $\Phi(u) \neq 0$ perché o $\Phi_1(u) \neq 0$ o $\Phi_2(u) \neq 0$.

Infine, per dimostrare la d) possiamo supporre che A non sia vuoto e abbia genere finito k e sia $\Phi : A \rightarrow S^{k-1}$ una mappa continua e dispari. Sappiamo che esiste una estensione continua e dispari $\tilde{\Phi} : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ di Φ . Poniamo allora $U = \{u \in E \mid |\tilde{\Phi}(u)| > \frac{1}{2}\}$. Evidentemente U è un insieme aperto e simmetrico rispetto a 0 che contiene A e $\bar{U} \in \Gamma$. Il resto è ovvio. $\square$

7.3 Osservazione

- a) Se A è un sottoinsieme finito e non vuoto di $E \setminus \{0\}$, simmetrico rispetto a 0, allora $\gamma(A) = 1$.
- b) Se $E = \mathbb{R}^N$ allora per ogni A di Γ $\gamma(A) \leq N$.

DIMOSTRAZIONE Per la a) basta osservare che se $A = \{x_1, -x_1, \dots, x_k, -x_k\}$ e $x_i \neq 0$ per ogni i , allora è ben definita e continua la mappa $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ che vale 1 sui punti x_i e -1 sui punti $-x_i$.

Per la b) basta considerare su A la mappa $\Phi = Id$. $\square$

La a) della precedente osservazione ammette una generalizzazione assai utile.

7.4 Osservazione Se $A \in \Gamma$ e $A \neq \emptyset$ allora $\gamma(A)$ è il minimo degli interi k tali che esistano k insiemi chiusi A'_i tali che $A'_i \cap -A'_i = \emptyset$ e $A = \cup_i (A'_i \cup -A'_i)$.

DIMOSTRAZIONE

Supponiamo che $\gamma(A) \leq k$ per un certo k in $\mathbb{N}$ con $k \geq 1$. Dunque esiste una mappa $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ continua e dispari. Se indichiamo con Φ_i la componente i -esima di Φ possiamo supporre che $(\sum_i \Phi_i^2(u))^{\frac{1}{2}} \geq N$ per ogni u di A . Poniamo ora $A'_i = \{u \in A \mid \Phi_i(u) \geq 1\}$.

Poiché Φ è dispari risulta che $A'_i \cup -A'_i = \{u \in A \mid |\Phi_i(u)| \geq 1\}$. Inoltre è evidente che $A'_i \cap -A'_i = \emptyset$ e per ogni u di A esiste i tale che $|\Phi_i(u)| \geq 1$. Dunque $A = \cup_i (A'_i \cup -A'_i)$.

Se viceversa esistono k insiemi A'_i con le proprietà indicate nell'enunciato, è evidente che per ogni i esiste una mappa continua e dispari $\Phi_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\Phi_i(u) = 1$ se $u \in A'_i$ e $\Phi_i(u) = -1$ se $u \in -A'_i$. Allora la mappa continua $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita da $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_N)$ è dispari e $\Phi(u) \neq 0$ per ogni u di A . $\square$

Da quanto ora visto si deduce immediatamente la seguente proprietà dei sottoinsiemi compatti di E .

7.5 Osservazione Se K è un sottoinsieme di E compatto e simmetrico rispetto a 0 e $0 \notin K$, allora $\gamma(K) < +\infty$.

È evidentemente molto importante poter valutare il genere di alcuni insiemi che intervengono in modo significativo in matematica. Il risultato che segue è molto importante nel calcolo delle variazioni.

7.6 Teorema Il genere della sfera

Se Ω è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ aperto, limitato e simmetrico rispetto all'origine e se $0 \in \Omega$ allora $\gamma(\partial\Omega) = N$.

Di conseguenza, se E è uno spazio normato avente infinite dimensioni e se Ω è un sottoinsieme di E aperto, limitato e simmetrico rispetto all'origine allora $\gamma(\partial\Omega) = +\infty$.

In particolare, se S è la sfera in $\mathbb{R}^N$ con centro in 0 allora $\gamma(S) = N$.

DIMOSTRAZIONE Sappiamo che $\gamma(\partial\Omega) \leq N$. D'altra parte, per il teorema di Borsuk, se $\Phi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ è una mappa continua e dispari e $k < N$ risulta che $0 \in \Phi(\partial\Omega)$. $\square$

• Il genere e il calcolo delle variazioni

Sia ora E uno spazio di Hilbert, ad esempio $\mathbb{R}^N$, sia X una sottovarietà di E di classe C^2 , completa e priva di bordo che non contenga 0 e sia simmetrica rispetto a 0: cioè se $u \in X$ anche $-u \in X$. Considereremo una funzione

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e supporremo che f sia una funzione pari, e cioè: $f(u) = f(-u)$ per ogni u di X .

7.7 Osservazione

Poiché f è pari per ogni c in $\mathbb{R}$ i sottolivelli f^c di f stanno in Γ e per ogni u di X $\text{grad}_X f(-u) = -\text{grad}_X f(u)$.

Di conseguenza le retrazioni che sono oggetto dei lemmi di deformazione 1.5 e 6.1 sono evidentemente mappe dispari e lo stesso vale per tutte le mappe che costituiscono le omotopie ad esse associate.

Le proprietà del genere messe in evidenza in 7.2 e l'osservazione ora fatta implicano il seguente enunciato cruciale.

7.8 Proposizione *Siano a e b due numeri reali tali che $a < b$ e supponiamo che valga la $(PS)_c$ per ogni c di $[a, b]$.*

Se $\gamma(f^a) \neq \gamma(f^b)$ allora esiste un livello critico per f in $[a, b]$.

DIMOSTRAZIONE Se la tesi non fosse vera per il primo lemma di deformazione 1.5 e per quanto appena osservato esisterebbe una retrazione dispari r di f^b in f^a . Di conseguenza risulterebbe che $\gamma(f^b) = \gamma(f^a)$. $\square$

Possiamo subito vedere un esercizio che ci introduce al metodo generale che esponiamo nel seguito.

7.9 Esercizio *Sia f una funzione di classe C^1 definita sulla sfera S di $\mathbb{R}^N$ con centro in 0 e supponiamo che f sia pari e tale che l'insieme X_m dei suoi punti di minimo sia finito o almeno abbia genere uguale a 1.*

Allora, per ogni sfera S' con centro in 0 che sia contenuta in S e abbia dimensione diversa da 0, esiste un livello critico per f nell'intervallo $[\inf f, \sup f(S')]$.

SUGGERIMENTO Posto $c = \sup f(S')$, risulta che $m < c$ altrimenti $S \subseteq X_m$ e allora $\gamma(X_m) \geq 2$. Ma per la d) di 7.2 si può verificare che esiste c_1 in $[\inf f, c[$ tale che $\gamma(f^{c_1}) = 1$. Dal fatto che $\gamma(f^c) \geq 2$ segue la tesi. $\square$

Per cercare un collegamento generale fra il genere di X e il numero dei punti critici di una funzione pari f definita su X , introduciamo ora alcuni valori che, sulla scorta del primo lemma di deformazione, possiamo dire siano candidati livelli critici per f . In un certo senso essi sono i “livelli critici essenziali” di f rispetto al genere.

7.10 Definizione *Per ogni k in $\mathbb{N}$ tale che $1 \leq k \leq \gamma(X)$ poniamo:*

$$\gamma_k = \inf \{c \in \mathbb{R} \mid \gamma(f^c) \geq k\}.$$

Si noti che può accadere che per nessun numero reale c risulti $\gamma(f^c) \geq k$. In questo caso risulta che $\gamma_k = +\infty$ ($\inf \emptyset = +\infty$) e deve essere $\sup f = +\infty$. Vediamo subito che i numeri γ_k sono in realtà dei minimassimi.

7.11 Osservazione Per ogni k in $\mathbb{N}$ tale che $1 \leq k \leq \gamma(X)$

$$\gamma_k = \inf \{ \sup f(A) \mid A \in \Gamma, \gamma(A) \geq k \}.$$

DIMOSTRAZIONE Indichiamo per il momento con γ'_k il minimassimo a destra dell'uguaglianza. Poichè per ogni c in $\mathbb{R}$ risulta che $f^c \in \Gamma$ e $\sup f(f^c) \leq c$, si ha: $\gamma'_k \leq \gamma_k$. Per la disuguaglianza inversa risulta ora che essa è senz'altro vera se $\gamma'_k = +\infty$. Se invece $\gamma'_k < +\infty$ possiamo dire che esistono insiemi A di Γ tali che $\gamma(A) \geq k$ e $\sup f(A) < +\infty$. Di conseguenza, per ogni insieme A di questo tipo, posto $c = \sup f(A)$, risulta che $\gamma(f^c) \geq k$ e dunque $\gamma_k \leq c$. Questo prova la tesi. $\square$

Il lemma che segue contiene già tutti gli elementi essenziali del collegamento fra genere e punti stazionari.

7.12 Lemma Sia k un intero tale che $1 \leq k \leq \gamma(X)$. Allora

- a) $\inf f = \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_k \leq \dots \leq \sup f$;
- b) se $\gamma_k \in \mathbb{R}$ e se vale la $(PS)_{\gamma_k}$ allora γ_k è livello critico per f ; se in particolare $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ allora $\gamma_1 = \min f$;
- c) se $\gamma_k = \gamma_{k+1} = \dots = \gamma_{k+h} \in \mathbb{R}$, per un certo $h \geq 1$ in $\mathbb{N}$, e se vale la $(PS)_{\gamma_k}$, allora l'insieme Z_{γ_k} dei punti critici di f al livello γ_k è tale che

$$\gamma(Z_{\gamma_k}) \geq h + 1$$

e dunque Z_{γ_k} è un insieme infinito.

DIMOSTRAZIONE

Per la a) vediamo che $\gamma_k \leq \sup f$. Per questo basta osservare che se un numero reale c è tale che $c > \sup f$, allora $\gamma(f^c) = \gamma(f^{c-\varepsilon}) (= \gamma(X))$, per qualche opportuno $\varepsilon > 0$. Il resto della a) è ancora più semplice.

Per la b) basta osservare che se γ_k non fosse un valore critico per f allora per il primo lemma di deformazione 1.5 esisterebbero $\varepsilon > 0$ ed una retrazione r di $f^{\gamma_k+\varepsilon}$ in $f^{\gamma_k-\varepsilon}$. Poiché f è pari r è dispari (vedi 7.7). Di conseguenza risulterebbe che $\gamma(f^{\gamma_k+\varepsilon}) \leq \gamma(f^{\gamma_k-\varepsilon})$. Ma questo contraddice la definizione di γ_k . Il resto è ovvio.

Verifichiamo la c). Evidentemente $Z_{\gamma_k} \in \Gamma$. Allora esiste un intorno aperto U di Z_{γ_k} tale che se $u \in U$ anche $-u \in U$, $\overline{U} \in \Gamma$ e $\gamma(U) = \gamma(Z_{\gamma_k})$. Per il secondo lemma di deformazione e la simmetria di f esistono $\varepsilon > 0$ ed una mappa dispari r di $f^{\gamma_k+\varepsilon} \setminus U$ in $f^{\gamma_k-\varepsilon}$. Allora:

$$k + h \leq \gamma(f^{\gamma_k+\varepsilon}) \leq \gamma(\overline{U}) + \gamma(f^{\gamma_k+\varepsilon} \setminus U) \leq$$

$$\leq \gamma(Z_{\gamma_k}) + \gamma(f^{\gamma_k - \varepsilon}) \leq \gamma(Z_{\gamma_k}) + k - 1. \quad \square$$

Da questo lemma si deducono in modo evidente i seguenti enunciati.

7.13 Proposizione *Supponiamo che a e b siano due numeri reali tali che $a < b$ e che valga la $(PS)_c$ per ogni c di $[a, b]$. Allora*

$\gamma(f^b) \leq \gamma(f^a) +$ numero delle coppie $\{-u, u\}$ di punti critici di f che stanno in $f^{-1}([a, b])$.

Possiamo dunque enunciare un risultato assai famoso dovuto ai due autori che per primi introdussero (mediante la nozione di “categoria” che vedremo più avanti) questi concetti.

7.14 Teorema (Lusternik e Schnirelman)

Se X è una varietà compatta allora f ha massimo e minimo ed ha almeno $\gamma(X)$ coppie $\{-u, u\}$ di punti critici.

In particolare ogni funzione pari e di classe C^1 definita sulla sfera $S(0, 1)$ di $\mathbb{R}^N$ ha almeno N coppie $\{-u, u\}$ di punti stazionari.

Più in generale da 7.12 si deduce immediatamente l’enunciato che segue.

7.15 Teorema *Se la funzione f è limitata e verifica la $(PS)_c$ per ogni c in $[\inf f, \sup f]$, allora f ha massimo e minimo ed ha almeno $\gamma(X)$ coppie $\{-u, u\}$ di punti critici.*

Se si assume l’ipotesi che i punti critici di f siano in numero finito dal lemma 7.12 segue evidentemente un altro fatto interessante.

7.16 Osservazione *Se nei due precedenti teoremi si aggiunge l’ipotesi che i punti critici di f siano in numero finito, allora f ammette $\gamma(X)$ livelli critici.*

7.17 Esercizio *Supponiamo che X sia uno spazio di Hilbert e che X_0 e X_1 siano due suoi sottospazi tali che $X = X_0 \oplus X_1$ e $\dim X_0 = N < +\infty$. Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione pari e di classe C^1 .*

Se S è una sfera in X_0 con centro in 0, supponiamo che f soddisfi le disuguaglianze:

$$\sup f(S) < \inf f(X_1) \quad e \quad \inf f > -\infty$$

e valga la $(PS)_c$ per ogni $c < \sup f(S)$.

Allora esistono N coppie $\{-u, u\}$ di punti critici per f con $f(u) \leq \sup f(S)$.

- **Il caso delle varietà non compatte**

Nello studio delle equazioni differenziali di tipo variazionale ci si riconduce (o ci si può ricondurre) allo studio del numero di punti stazionari di un opportuno funzionale definito su una sottovarietà X di uno “spazio di funzioni”. È frequente il caso in cui X non è compatta e ha genere infinito. Vogliamo dedicare perciò a questo caso qualche ulteriore riflessione. Ci limitiamo a considerare una situazione che si incontra di frequente.

Premettiamo due considerazioni. Per cominciare notiamo che nelle ipotesi della proposizione 7.15 la varietà X ha genere finito. Vale infatti l'affermazione che segue.

7.18 Proposizione

Supponiamo che la funzione f sia inferiormente limitata e che, per un certo numero reale c_0 , valga la $(PS)_c$ per ogni c con $c \leq c_0$. Allora $\gamma(f^{c_0}) < +\infty$.

DIMOSTRAZIONE Dall'ipotesi segue evidentemente che l'insieme dei punti critici di f in f^{c_0} è compatto. Allora esiste un intorno aperto V di tale insieme, simmetrico rispetto a 0 e tale che $\gamma(\bar{V}) < +\infty$. Poniamo poi $m = \inf f$. Per il secondo lemma di deformazione sappiamo che per ogni c in $[m, c_0]$ esistono $\varepsilon > 0$ ed una mappa continua e dispari $\Phi : f^{c+\varepsilon} \setminus V \rightarrow f^{c-\varepsilon}$. Allora esistono un numero finito di intervalli $[a_i, b_i]$, con $i = 0, 1, \dots, k$, tali che per ogni i il sottolivello f^{a_i} contenga l'immagine di $f^{b_i} \setminus V$ secondo una mappa dispari e tali che $[m, c_0]$ sia contenuto in $\cup_i]a_i, b_i[$. Possiamo anche supporre che per ogni i fra 1 e k risulti $a_{i-1} < a_i < b_{i-1} < b_i$. Di conseguenza per ogni i con $1 \leq i \leq k$ risulta

$$\gamma(f^{b_i}) \leq \gamma(\bar{V}) + \gamma(f^{b_i} \setminus V) \leq \gamma(\bar{V}) + \gamma(f^{a_i}) \leq \gamma(\bar{V}) + \gamma(f^{b_{i-1}})$$

Dunque, dato che $f^{a_0} = \emptyset$, risulta che

$$\gamma(f^{c_0}) \leq \gamma(f^{b_k}) \leq k \gamma(\bar{V}) + \gamma(f^{b_0}) \leq (k+1) \gamma(\bar{V}). \quad \square$$

La seconda considerazione è un semplice ritocco del primo lemma di deformazione, utile ad es. nel caso in cui $\sup f = +\infty$.

7.19 Osservazione *Supponiamo che f non abbia massimo e che, per un certo numero reale a , f non abbia punti critici u con $f(u) \geq a$. Supponiamo poi che valga la $(PS)_c$ per ogni c con $a \leq c < \sup f$. Allora f^a è retratto di deformazione di tutto X . Poiché f è pari la retrazione è dispari.*

DIMOSTRAZIONE Basta osservare che nella dimostrazione del primo lemma di deformazione 1.5 è sufficiente che per ogni assegnato punto iniziale u con $f(u) \geq a$ valga la $(PS)_c$ per ogni c in $[a, f(u)]$. $\square$

A questo punto è a portata di mano un teorema che inquadra una situazione abbastanza frequente nello studio di alcune classi di equazioni differenziali di tipo variazionale.

7.20 Teorema *Se la funzione f , pari e di classe C^1 , è inferiormente limitata e non ha massimo, e se vale la $(PS)_c$ per ogni c in $[\inf f, \sup f[$. Allora:*
a) *f ha minimo ed ha almeno $\gamma(X)$ coppie $\{-u, u\}$ di punti critici;*
b) *se $\gamma(X) = +\infty$ allora esiste una successione $(\{-u_k, u_k\})_{k \in \mathbb{N}}$ di coppie di punti critici di f tale che $\sup f(u_k) = \sup f$.*

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo anzitutto la b). Supponiamo per assurdo che esista c_0 con $c_0 < \sup f$ tale che non esistano livelli critici maggiori di c_0 . Allora dal lemma 7.19 segue che $\gamma(X) = \gamma(f^{c_0})$ e dalla proposizione 7.18 segue che $\gamma(X) < +\infty$.

Dimostriamo la a). Sappiamo già che $\gamma_1 = \min f$, perché per ipotesi vale la $(PS)_c$ con $c = \inf f$.

Supponiamo poi che f abbia un numero finito di punti critici. Allora esiste effettivamente c_0 con le proprietà: $c_0 < \sup f$ e non esistono livelli critici maggiori di c_0 . Di conseguenza, per 7.19 risulta che $\gamma(X) = \gamma(f^{c_0})$, e da 7.13 segue che

$$\gamma(X) = \gamma(f^{c_0}) \leq \gamma(f^{\gamma_1-1}) + \text{numero di punti critici } u \text{ con } f(u) \leq c_0.$$

Ma $\gamma(f^{\gamma_1-1}) = \gamma(\emptyset) = 0$. $\square$

Vediamo subito una importante conseguenza di questo teorema.

7.21 Teorema *Se E è uno spazio di Banach di dimensione infinita sia $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione pari e di classe C^1 definita sulla sfera S di E che ha centro in 0. Se f è inferiormente limitata e non ha massimo, e se vale la $(PS)_c$ per ogni c in $[\inf f, \sup f[$, allora:*
 f ha infinite coppie $\{-u, u\}$ di punti critici ed esiste una successione di coppie $\{-u_k, u_k\}$ di punti critici per f tali che $\sup f(u_k) = \sup f$.

8 La categoria di Lusternik e Schnirelman

Ora vogliamo fare un cenno ad un procedimento che, anche in assenza di ipotesi di simmetria, assegna agli spazi topologici un numero intero che rappresenta, da un certo punto di vista, un indice della complessità della loro struttura. Si tratta della categoria di Lusternik e Schnirelman, della quale metteremo in evidenza, con l'aiuto del secondo lemma di deformazione, una proprietà fondamentale: se ad esempio lo spazio topologico X è una varietà regolare allora *ogni funzione regolare $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, in presenza di condizioni di compattezza del tipo della (PS), ammette un numero di punti critici almeno pari alla categoria di X .*

Non occorre sottolineare l'importanza di questo fatto, e resta d'altra parte sorprendente la semplicità delle argomentazioni che lo sostengono. Naturalmente, in questo modo diventa molto importante il problema, spesso impegnativo, di valutare la categoria di X .

• La definizione di categoria e alcune proprietà

Sia dunque X uno spazio topologico. Secondo una abitudine abbastanza diffusa opereremo nella classe dei sottoinsiemi chiusi di X , ma altre scelte possono essere fatte.

8.1 Definizione *Se A è un sottoinsieme chiuso e non vuoto di X e $k \in \mathbb{N}^*$, diciamo che la categoria di A in X è k , e scriviamo $\text{cat}_X(A) = k$, se k è il minimo numero di insiemi F_i , chiusi e contrattili in X , tali che $A \subseteq \cup_i F_i$. Se k non esiste poniamo: $\text{cat}_X(A) = +\infty$. Inoltre poniamo: $\text{cat}_X(\emptyset) = 0$.*

Anche per la categoria valgono alcune proprietà che sono cruciali per il collegamento di questa nozione con il numero dei punti critici di un funzionale. Nell'elenco che segue, salvo l'ultima, le altre sono assai semplici e, come vedremo, sono spesso sufficienti da sole allo studio dei problemi concreti di analisi, anche perché l'ultima in molti casi diventa evidente. Per gli scopi di questo breve excursus noi ci limiteremo a dimostrare le prime tre.

8.2 Alcune proprietà della categoria di Lusternik e Schnirelman

Siano A e B sottoinsiemi chiusi di X . Allora:

- a) $\text{cat}_X(A) = 0$ se e solo se $A = \emptyset$,
- b) $\text{cat}_X(A \cup B) \leq \text{cat}_X(A) + \text{cat}_X(B)$,
- c) *se B contiene un deformato di A in X , e cioè esiste una mappa continua $\mathcal{H} : [0, 1] \times A \rightarrow X$ tale che $\mathcal{H}(0, u) = u$ e $\mathcal{H}(1, u) \in B$ per ogni u di A , allora $\text{cat}_X(A) \leq \text{cat}_X(B)$,
in particolare, se $A \subseteq B$ allora $\text{cat}_X(A) \leq \text{cat}_X(B)$,*

d) se X è (ad esempio) una varietà regolare, modellata su $\mathbb{R}^N$ (o su uno spazio di Banach), allora ogni sottoinsieme chiuso A di X ammette un intorno chiuso che ha in X la stessa categoria di A .

DIMOSTRAZIONE

La a) è ovvia.

Per la b) basta la semplice osservazione che se $F_1, \dots, F_k$ e $F'_1, \dots, F'_h$ sono sottoinsiemi chiusi e contrattili di X tale che $A \subseteq \cup_i F_i$ e $B \subseteq \cup_i F'_i$ allora $A \cup B \subseteq (\cup_i F_i) \cup (\cup_i F'_i)$.

Per la c) osserviamo che se $F_1, \dots, F_k$ sono sottoinsiemi chiusi e contrattili di X che coprono B , gli insiemi $\tilde{F}_i = \{u \in A \mid \mathcal{H}(1, u) \in B\}$ sono chiusi in X , coprono evidentemente A e inoltre sono anche contrattili in X .

Per verificare quest'ultima affermazione basta considerare le omotopie che contraggono gli F_i , e cioè le mappe continue $\mathcal{H}_i : [0, 1] \times F_i \rightarrow X$ tali che $\mathcal{H}_i(0, u) = u$ e $\mathcal{H}_i(1, u) = u_i$ per ogni u di F_i , dove u_i è un punto di X . Con le $\mathcal{H}_i$ possiamo definire le $\tilde{\mathcal{H}}_i : [0, 2] \times \tilde{F}_i \rightarrow X$, nel seguente modo: per ogni u in $\tilde{F}_i$ poniamo $\tilde{\mathcal{H}}_i(t, u) = \mathcal{H}(t, u)$, se $t \in [0, 1]$, $\tilde{\mathcal{H}}_i(t, u) = \mathcal{H}_i(t - 1, \mathcal{H}(1, u))$, se $t \in [1, 2]$. Le $\tilde{\mathcal{H}}_i$ sono continue perché $\mathcal{H}_i(0, \mathcal{H}(1, u)) = \mathcal{H}(1, u)$, e contraggono ogni insieme $\tilde{F}_i$ al punto u_i . $\square$

L'osservazione che segue è molto utile e il lettore può facilmente verificarla.

8.3 Osservazione Supponiamo che X sia una varietà regolare. Allora:

- a) ogni punto ammette un intorno chiuso e contrattile;
- b) se X è anche connessa, allora ogni insieme finito ammette un intorno chiuso e contrattile;
- c) se K è un sottoinsieme compatto di X allora $\text{cat}_X(K) < +\infty$.

8.4 Esempi

- a) $\text{cat}_{S^N}(S^N) = \text{cat}_{\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\}}(\text{dove } S^N) = 2$ ($S^N = \{u \in \mathbb{R}^{N+1} \mid |u| = 1\}$).
- b) Il toro $T = S^1 \times S^1$ è tale che $\text{cat}_T(T) = 3$.

DIMOSTRAZIONE La a) è evidente, dato che sappiamo che S^N non è contrattile in sé. Della b) omettiamo la dimostrazione.

• La categoria e il calcolo delle variazioni

Consideriamo di nuovo una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , dove X è uno spazio di Hilbert o più in generale, una varietà riemanniana, di classe C^2 , completa e priva di bordo, di dimensione finita o infinita.

Possiamo cominciare introducendo mediante la categoria i candidati livelli critici di f , che potremmo chiamare i “livelli critici essenziali” di f rispetto alla categoria.

8.5 Definizione Per ogni intero k tale che $1 \leq k \leq \text{cat}_X(X)$ poniamo:

$$c_k = \inf \{c \in \mathbb{R} \mid \text{cat}_X(f^c) \geq k\}.$$

Si noti che, secondo questa definizione, se k è un intero compreso fra 1 e $\text{cat}_X(X)$, risulta che $c_k = +\infty$ se e solo se non esiste nessun numero reale c tale che $\text{cat}_X(f^c) \geq k$. In questo caso evidentemente $\sup f = +\infty$.

Come nel caso del genere vale evidentemente l'osservazione che segue.

8.6 Osservazione I livelli c_k che abbiamo qui introdotto sono dei minimi massimi:

$$c_k = \inf \{\sup f(A) \mid A \subseteq X, \text{cat}_X(A) \geq k\}.$$

Dalle proprietà della categoria si deducono le seguenti proprietà dei c_k esattamente come nel caso del genere.

8.7 Lemma Sia k un intero tale che $1 \leq k \leq \text{cat}_X(X)$. Allora

- a) $\inf f = c_1 \leq \dots \leq c_k \leq \dots \leq \sup f$;
- b) se $c_k \in \mathbb{R}$ e se vale la $(PS)_{c_k}$ allora c_k è livello critico per f ; se in particolare $c_1 \in \mathbb{R}$ allora $c_1 = \min f$;
- c) se $c_k = c_{k+1} = \dots = c_{k+h} \in \mathbb{R}$, per un certo $h \geq 1$ in $\mathbb{N}$, e se vale la $(PS)_{c_k}$, allora l'insieme Z_{c_k} dei punti critici di f al livello c_k è tale che

$$\text{cat}_X(Z_{c_k}) \geq h + 1.$$

In particolare Z_{c_k} è un insieme infinito.

Da questo lemma si deducono evidentemente i seguenti enunciati.

8.8 Proposizione Supponiamo che a e b siano due numeri reali tali che $a < b$ e che valga la $(PS)_c$ per ogni c di $[a, b]$. Allora

$$\text{cat}_X(f^b) \leq \text{cat}_X(f^a) + \text{numero dei punti critici di } f \text{ in } f^{-1}([a, b]).$$

8.9 Teorema Se X è una varietà compatta allora ogni funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 ammette $\text{cat}_X(X)$ punti stazionari.

Più in generale, dal lemma 8.7 si deduce in modo immediato il seguente enunciato.

8.10 Teorema Supponiamo che f sia limitata e che valga la $(PS)_c$ per ogni c di $[\inf f, \sup f]$. Allora f ha almeno $\text{cat}_X(X)$ punti critici.

Se si suppone, come è naturale, che la varietà X sia connessa, si vede bene che per ottenere questi risultati non è necessario usare la proprietà **d)** del gruppo elencato in 8.2, che è l'unica di quelle che non abbiamo dimostrato. Infatti qui possiamo assumere l'ipotesi che i punti critici di f siano in numero finito e allora l'insieme Z_{c_k} dei punti critici di f a livello c_k è finito e la **d)** è ovvia per gli insiemi finiti, come mostra la 8.3.

Mediante 8.3 si può anche osservare, ad esempio, quanto segue.

8.11 Osservazione *Se nel teorema 8.9 si aggiunge l'ipotesi che X sia una varietà connessa e che i punti critici di f siano in numero finito, allora f ammette $\text{cat}_X(X)$ livelli critici.*

8.12 Esercizio *Supponiamo che X sia uno spazio di Hilbert e che X_0 e X_1 siano due suoi sottospazi tali che $X = X_0 \oplus X_1$ e $\dim X_0 = N < +\infty$. Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 . Se W è un sottoinsieme aperto di X_0 contenente 0, supponiamo che f soddisfi le disuguaglianze:*

$$\sup f(\partial W) < \inf f(X_1) \quad e \quad \inf f > -\infty$$

e valga la (PS) $_c$ per ogni $c < \sup f(\partial W)$.

Allora f ammette 2 punti critici u_1 e u_2 , con $f(u_i) \leq \sup f(\partial W)$.

Come nel caso del genere, nelle ipotesi del teorema 8.10 la varietà X ha categoria finita. Vale infatti la seguente affermazione che si dimostra nello stesso modo.

8.13 Proposizione *Supponiamo che la funzione f sia inferiormente limitata e che valga la (PS) $_c$ per ogni numero reale c con $c \leq c_0$, per un certo numero reale c_0 . Allora $\text{cat}_X(f^{c_0}) < +\infty$.*

Per poter operare anche con varietà aventi infinite dimensioni e categoria infinita ci serve uscire dall'ambito delle varietà compatte. È in effetti possibile, ed è molto utile, dare qualche enunciato "globale", del tipo ora visto nel caso compatto, che integra le proprietà messe finora in evidenza. Per vederlo basta ora aggiungere al primo lemma di deformazione una semplice riflessione già svolta nel caso del genere.

8.14 Osservazione *Dato il numero reale a , supponiamo che non ci siano punti critici u con $f(u) \geq a$ e che valga la (PS) $_c$ per ogni $c \geq a$. Allora f^a è retratto di deformazione di tutto X .*

A questo punto è a portata di mano un teorema che inquadra una situazione abbastanza frequente negli spazi funzionali nei quali viene impostato lo studio di alcune classi di equazioni differenziali.

8.15 Teorema *Supponiamo che la funzione f sia inferiormente limitata, non abbia massimo e verifichi la $(PS)_c$ per ogni c in $[\inf f, \sup f[$. Allora:*

- a)** *f ha minimo ed ha almeno $\text{cat}_X(X)$ punti critici;*
- b)** *se $\text{cat}_X(X) = +\infty$ allora esiste una successione $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di punti critici di f tale che $\sup f(u_k) = \sup f$.*

• % Un risultato famoso e brillante

La nozione di categoria nacque insieme alle ricerche concernenti le funzioni pari sulla sfera e portarono al bellissimo teorema di Lusternik e Schnirelman. Tuttavia gli sviluppi delle ricerche mostrarono che quel punto di vista era ricco di potenzialità ancora maggiori. Ricordiamo qui un risultato brillantissimo, e anche molto impegnativo, che si può dire rappresenti un traguardo assai alto di queste ricerche. Questo risultato riguarda le linee geodetiche su una varietà.

Consideriamo per semplicità una sottovarietà M di $\mathbb{R}^N$, di classe C^2 e priva di bordo.

8.16 Definizione *Dati a e b in M con $a < b$, una curva $q : [a, b] \rightarrow M$ di classe C^2 è detta una “geodetica” su M se per ogni t di $[a, b]$ il vettore $\dot{q}(t)$ è ortogonale al piano tangente a M in $q(t)$.*

Se poi, nell'intorno di M , è presente un “potenziale” V , che dà luogo al “campo di forze conservativo” $\mathbf{F} = -\text{grad}V$, e introduciamo anche una “massa” $m > 0$, una curva q su M è una “geodetica su M di un punto di massa m rispetto al potenziale V ”, se per ogni t di $[a, b]$

il vettore $m\ddot{q}(t) + \text{grad}V(q(t))$ è ortogonale al piano tangente a M in $q(t)$.

È interessante tenere presente che, se $N = 3$, una geodetica su M rappresenta la traiettoria che segue un punto materiale che sia vincolato a stare su M e non sia soggetto ad alcuna forza esterna. Insomma una geodetica su M è ciò che in $\mathbb{R}^3$ è il moto rettilineo uniforme. Così una geodetica su M di un punto di massa m rispetto a un potenziale V rappresenta la traiettoria che effettivamente segue un punto materiale di massa m vincolato ad M quando sia soggetto al campo di forze $\mathbf{F} = -\text{grad}V$.

Fissati due punti A e B su M , vogliamo occuparci delle curve geodetiche su M che hanno estremi in A e B .

Ebbene, come si può attendere, è possibile stabilire sullo spazio X delle curve su M da A a B una struttura di varietà, e risulta che il consueto funzionale $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definito dall'integrale della lagrangiana:

$$f(q) = \int_a^b \left(\frac{m}{2} |\dot{q}|^2 - V(q) \right) dt$$

è tale che i suoi punti stazionari siano proprio le geodetiche su M da A a B .

Mediante la cohomologia si dimostra che, se M è completa e priva di bordo e non è contrattile allora $\text{cat}_X(X) = +\infty$. Si giunge così al teorema.

8.17 Teorema *Se M è completa e priva di bordo e non è contrattile allora esistono infinite geodetiche da A a B su M .*

9 % Qualche problema “ai limiti” in dinamica

Nello studio dei problemi che si presentano in alcune discipline, la costruzione di un modello matematico, quando è possibile, gioca un ruolo essenziale, sia teorico che pratico. È ben vero che la creazione di un modello è abbastanza arbitraria, potremmo dire “prescientifica”: tanto per fare un esempio, le derivate sono una “invenzione” (iniziata con le “flussioni” di Newton) che è adatta a tradurre in termini matematici il concetto di velocità di un punto in movimento non uniforme nello spazio. Tuttavia la ricerca e la stessa costruzione del modello portano a selezionare un punto di vista corrispondente agli scopi che ci si prefigge, a riflettere su questi ultimi, e a mettere in luce una struttura logica intrinseca al problema. Sarà poi il confronto fra le attese e i risultati ai quali porta il modello a provocare una nuova analisi delle proprie intuizioni e una eventuale revisione del modello. La ricerca è fatta proprio di questi passaggi. È così che si giunge a formulare congetture inattese e a ricercare metodi di risoluzione. Questo discorso sembra forse astratto e un po’ filosofico, ma se ne constata facilmente la concretezza anche in situazioni abbastanza semplici come quelle che qui vogliamo esaminare.

Negli esempi che qui consideriamo il quadro logico, il modello, è quello offerto dal classico principio di Hamilton. Noi vedremo come, in modo del tutto naturale e spontaneo, l’analisi del modello porta a mettere in luce alcune basilari strutture topologiche che si rivelano estremamente utili a dimostrare, e prima ancora a congetturare, l’esistenza di soluzioni.

Si può dire che il fascino della ricerca scientifica stia proprio in questa alternanza di fasi diverse ripercorse a livelli crescenti: l’osservazione di “fatti concreti” come i “fenomeni naturali”, l’ideazione di strumenti logici come i “modelli” matematici, forse inventati e astratti o forse “scoperti” sulla base della nostra cultura e della nostra immaginazione, e infine l’analisi delle strutture logiche, della “ratio” che, pur non prevista, in quei modelli progressivamente si manifesta.

Il problema pilota che scegliamo è la classica equazione della dinamica. L’analisi classica fornisce riposte in un certo senso esaurienti riguardo all’esistenza di soluzioni delle quali siano assegnate posizione e velocità “iniziali”, e

cioè in un certo istante “iniziale”. Noi vogliamo qui occuparci delle soluzioni alle quali sia invece imposta la posizione in due istanti prefissati.

9.1 Il problema “ai limiti” nella dinamica

Supponiamo che in $\mathbb{R}^N$ un “punto materiale” di massa $m > 0$ sia soggetto al campo di forze conservativo $-\text{grad}V$, dove $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è un assegnato potenziale che supporremo sia di classe C^1 . Assegnati due punti A e B in $\mathbb{R}^N$ e due istanti di tempo a e b , con $a < b$, noi vogliamo studiare il problema:

$$9.1.1 \quad \begin{cases} m \ddot{q} + \text{grad}V(q) = 0 \\ q(a) = A, \quad q(b) = B \\ q \in C^2(a, b; \mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Consideriamo per questo gli spazi di Sobolev $H^1(a, b; \mathbb{R}^N)$ e $H_0^1(a, b; \mathbb{R}^N)$ che indicheremo brevemente con i simbol H^1 e H_0^1 rispettivamente. Come è noto H^1 è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare:

$$\langle q, \delta \rangle = \int_a^b (q \cdot \delta + \dot{q} \cdot \dot{\delta}) dt,$$

dove il simbolo “ $\cdot$ ” denota il prodotto scalare in $\mathbb{R}^N$. Indicheremo con $\| \cdot \|$ la norma relativa al prodotto $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ci serve anche il sottospazio affine X di H definito da $X = \{q \in H^1 \mid q(a) = A, \quad q(b) = B\}$ in H^1 .

9.2 Definizione Consideriamo su H^1 il classico funzionale $f : H^1 \rightarrow \mathbb{R}$, definito dall’integrale della Lagrangiana associata al sistema di equazioni

$$m \ddot{q} + \text{grad}V(q) = 0 \quad \text{e cioè}$$

$$f(q) = \int_a^b \left(\frac{m}{2} |\dot{q}|^2 - V(q) \right) dt.$$

9.3 Osservazione Per ogni q e δ in H^1 risulta

$$f'(q)(\delta) \left(= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(q + s\delta) - f(q)}{s} \right) = \int_a^b (m \dot{q} \cdot \dot{\delta} - \text{grad}V(q) \cdot \delta) dt.$$

DIMOSTRAZIONE La tesi segue dalle uguaglianze:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{s} \frac{m}{2} (|\dot{q} + s\dot{\delta}|^2 - |\dot{q}|^2) dt &= s \int_a^b \frac{m}{2} |\dot{q}|^2 dt + m \int_a^b \dot{q} \cdot \dot{\delta} dt, \\ \lim_{s \rightarrow 0} \int_a^b \frac{V(q + s\delta) - V(q)}{s} dt &= \int_a^b \text{grad}V(q) \cdot \delta dt, \end{aligned}$$

l’ultima delle quali vale perchè l’integrando a primo membro, per $s \rightarrow 0$, converge uniformemente all’integrando a secondo membro.

Il classico principio di Hamilton stabilisce un fondamentale collegamento fra il problema 9.1.1 e il funzionale f .

9.4 Proposizione (Una versione del principio di Hamilton)

I punti stazionari di f sul vincolo X sono le soluzioni di 9.1.1 .

Di conseguenza le soluzioni di 9.1.1 sono le soluzioni del “problema debole”

$$9.4.1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b (m \dot{q} \cdot \dot{\delta} - \text{grad} V(q) \cdot \delta) dt = 0, \text{ per ogni } \delta \text{ in } H_0^1 \\ q \in X. \end{array} \right.$$

DIMOSTRAZIONE Anzitutto osserviamo che un dato q in X è stazionario per f rispetto al vincolo X se e solo se $f'(q)(\delta) = 0$ per ogni δ in H_0^1 , dato che $q + s\delta \in H^1$ (per $s \neq 0$) se e solo se $\delta \in H_0^1$. Dunque la 9.4.1 equivale a dire che q è stazionario per f su X .

Se ora vale la 9.4.1 allora la derivata debole di $\dot{q}$ è uguale a $-\text{grad} V(q)$ e dunque è continua. Allora $\dot{q}$ è di classe C^1 (e le sue derivate debole e forte coincidono). In particolare $\dot{q}$ è continua. Di conseguenza q è di classe C^1 (e le sue derivate debole e forte coincidono). Dunque vale la 9.1.1 . Il viceversa è del tutto ovvio. $\square$

Va detto che nella versione originale del principio di Hamilton non si parla di derivate in senso debole (non erano ancora state introdotte) e si assume che q e δ siano regolari quanto occorre per rimanere nella analisi classica. A noi questo non basta perché il principio di Hamilton non ci serve soltanto per descrivere una proprietà delle soluzioni di 9.1. Infatti, con la versione ora vista di questo principio, siamo in grado di dimostrare che esistono delle soluzioni di quel problema, una o più, a seconda del comportamento di V .

Un primo risultato di esistenza lo possiamo avere semplicemente mediante un classico procedimento di minimizzazione, senza bisogno dei metodi topologici di cui abbiamo parlato nei paragrafi precedenti.

9.5 Teorema *Supponiamo che il potenziale V sia superiormente limitato, o più in generale, che soddisfi la condizione:*

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{V(x)}{|x|^2} = 0.$$

Allora esiste una soluzione q di 9.1.1. Infatti esiste q in X che minimizza f su X .

DIMOSTRAZIONE

I passo) Cominciamo con l'osservare che, nella nostra ipotesi,

$$\lim_{q \in X, \|q\| \rightarrow \infty} f(q) = +\infty.$$

Infatti, fissato un $\varepsilon > 0$ esiste K in $\mathbb{R}$ tale che per ogni x in $\mathbb{R}^N$ valga la disuguaglianza $V(x) \leq \varepsilon|x|^2 + K$.

D'altra parte, se $q \in X$ allora $|q(t)| \leq \int_a^b |\dot{q}| dt + |A|$, evidentemente.

Di conseguenza, se $q \in X$ allora

$$9.5.1 \quad \int_a^b |q|^2 dt \leq 2(b-a)^2 \int_a^b |\dot{q}|^2 dt + 2(b-a)|A|^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Dunque} \quad f(q) &\geq \frac{m}{2} \int_a^b |\dot{q}|^2 dt - \varepsilon \int_a^b |q|^2 dt - K(b-a) \geq \\ &\geq \left(\frac{m}{2} - 2\varepsilon(b-a)^2\right) \int_a^b |\dot{q}|^2 dt - \varepsilon(b-a) (2|A|^2 + K). \end{aligned}$$

Se dunque ε è abbastanza piccolo vale la tesi perché, se $\|q\| \rightarrow \infty$, anche $\int_a^b |\dot{q}|^2 dt \rightarrow \infty$, come mostra la 9.5.1.

Il passo) Sia $(q_h)_{h \in \mathbb{N}}$ una successione minimizzante f su X : $f(q_h) \rightarrow \inf f(X)$. Per il primo passo $(q_h)_{h \in \mathbb{N}}$ è limitata in H^1 . Di conseguenza è noto che esiste una sottosuccessione $(q_{h_k})_{k \in \mathbb{N}}$ che converge debolmente in H^1 e uniformemente ad una q di H^1 . Allora $q \in X$, e inoltre

$$\int_a^b |\dot{q}|^2 dt \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_a^b |\dot{q}_{h_k}|^2 dt, \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_a^b V(q_{h_k}) dt = \int_a^b V(q) dt.$$

Si noti che la disuguaglianza a sinistra vale perché la funzione $\int_a^b |\dot{q}|^2 dt$ è convessa e continua in H^1 , e dunque è semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza debole. $\square$

9.6 Corollario *Se V è una funzione concava il problema 9.1.1 ammette una ed una sola soluzione.*

Il lettore può fare la semplice dimostrazione per esercizio.

Vogliamo vedere che in opportune ipotesi su V il problema 9.1.1 ammette più di una soluzione.

Per concentrare l'attenzione sugli aspetti essenziali del procedimento supporremo che $A = B = 0$. Con piccole modifiche il lettore potrà per esercizio considerare il caso generale.

Ricordiamo che nello spazio $H_0^1 = \{q \in H^1 \mid q(a) = q(b) = 0\}$ la norma $\|\cdot\|_0$ associata al prodotto scalare $\langle q, \delta \rangle_0 = \int_a^b \dot{q} \cdot \dot{\delta} dt$ equivale a quella di H^1 .

Anche se non è strettamente necessario per il seguito, è interessante studiare la forma e le proprietà del gradiente di f . Assumiamo ora la sola ipotesi che V sia di classe C^1 .

9.7 Osservazione *Esiste una ed una sola mappa $G : L^1(a, b; \mathbb{R}^N) \rightarrow H_0^1$*

$$\text{tale che} \quad \int_a^b G(\dot{h}) \cdot \dot{\delta} dt = - \int_a^b h \cdot \delta dt, \quad \text{per ogni } q \text{ e } \delta \text{ in } H_0^1,$$

cioè tale che $\ddot{G}(h) = h$, nel senso delle distribuzioni.

Inoltre $\|G(h)\|_0 \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \|h\|_{L^1}$, per ogni h in L^1 .

DIMOSTRAZIONE Poiché $|\int_a^b h \cdot \delta \, dt| \leq \|h\|_{L^1} \|\delta\|_{L^\infty} \leq \|h\|_{L^1} (b-a)^{\frac{1}{2}} \|\delta\|_0$, allora, per il teorema di rappresentazione di Riesz, possiamo dire che per ogni h in L^1 esiste un unico elemento $G(h)$ in H_0^1 tale che, per ogni δ in H_0^1 risulti: $\langle G(h), \delta \rangle_0 = \int_a^b h \cdot \delta \, dt$. Inoltre $\|G(h)\|_0 \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \|h\|_{L^1}$ $\square$

Si verifichi per esercizio che G è una mappa compatta.

Indichiamo ancora con f la restrizione ad H_0^1 del funzionale definito in 9.2.

9.8 Osservazione Il funzionale $f : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^1 . Inoltre

$$\text{grad} f(q) = mq + G(\text{grad} V(q)), \text{ per ogni } q \text{ in } H_0^1.$$

La mappa $K : H_0^1 \rightarrow H_0^1$, che a ogni q associa $K(q) = G(\text{grad} V(q))$, è compatta.

DIMOSTRAZIONE

I passo) Notiamo che l'immersione $i : H_0^1 \rightarrow C^0$ è compatta e che la mappa $\mathcal{G}_V : C^0 \rightarrow C^0$ che a q associa $\text{grad} V(q)$ è continua. Se ora indichiamo con j l'immersione continua di C^0 in L^1 vediamo che la mappa K è compatta perché $K = G \circ j \circ \mathcal{G}_V \circ i$.

II passo) È evidente che per ogni q in H_0^1 , $f'(q)(\delta)$, come funzione di δ , è una forma lineare continua su H_0^1 , cioè sta in $(H_0^1)'$. Indichiamola con $f'(q)$. Dall'osservazione 9.7 segue evidentemente che

$$f'(q)(\delta) = \langle mq + G(\text{grad} V(q)), \delta \rangle_0, \text{ per ogni } \delta \text{ in } H_0^1.$$

Se ne deduce che $f'(q)$ dipende con continuità da q in H_0^1 . Allora, per il teorema del differenziale totale, f è differenziabile e dunque:

$$f'(q)(\delta) = df(q)(\delta) = \langle \text{grad} f(q), \delta \rangle_0, \text{ per ogni } \delta \text{ in } H_0^1.$$

Dal confronto di questa formula con la precedente si ottiene l'espressione di $\text{grad} f(q)$. $\square$

Vogliamo anche mettere in evidenza il ruolo che l'ampiezza dell'intervallo $[a, b]$ può giocare nel problema 9.1. Studiamo perciò il problema 9.1.1 nella forma che segue.

9.9 Un problema ai limiti con i dati nulli al bordo

$$9.9.1 \quad \begin{cases} m \ddot{q} + (b-a)^2 \text{grad} V(q) = 0 \\ q(0) = q(1) = 0 \\ q \in C^2(0, 1; \mathbb{R}^N) \end{cases}$$

È chiaro che se q è una soluzione di questo problema allora $\tilde{q}$ definita da

$$\tilde{q}(t) = q\left(\frac{t}{b-a}\right)$$

risolve 9.1.1 con $A = B = 0$, e viceversa.

9.10 Teorema

- a)** Se $b - a$ è abbastanza piccolo allora 9.9.1 ammette una soluzione.
b) Se inoltre V soddisfa l'ipotesi:

$$(V) \quad \begin{cases} \text{esistono } \alpha > 2 \text{ e } r_0 > 0 \text{ tali che} \\ 0 < \alpha V(x) \leq V'(x)(x), & \text{almeno per } |x| \geq r_0, \end{cases}$$

allora esiste una seconda soluzione

Premettiamo un'osservazione.

9.11 Osservazione Se vale l'ipotesi (V) allora esistono c_0, c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$, tali che $c_1 > 0$ e

$$\mathbf{a)} \quad V'(x)(x) \geq \alpha V(x) - c_0, \quad \text{per ogni } x \text{ in } \mathbb{R}^N,$$

$$\mathbf{b)} \quad V(x) \geq c_1 |x|^\alpha - c_2, \quad \text{per ogni } x \text{ in } \mathbb{R}^N.$$

DIMOSTRAZIONE La **a)** è evidente. Per la **b)**, per ogni fissato x con $|x| = r_0$ consideriamo la funzione $g(t) = V(tx)$, definita per $t \geq 1$. Risulta:

$$tg'(t) = tV'(tx)(x) \geq \alpha V(tx) = \alpha g(t), \quad \text{e dunque } (t^{-\alpha}g(t))' \geq 0.$$

Di conseguenza $V(tx) \geq t^\alpha V(x)$, per ogni $t \geq 1$.

Ovvero $V(x) \geq |x|^\alpha \frac{1}{r_0^\alpha} \min \{V(x) \mid |x| = r_0\}$, per ogni x con $|x| \geq r_0$.

Il resto è ovvio. □

9.12 Dimostrazione del teorema 9.10

I passo) Posto $l = b - a$ consideriamo il funzionale $f : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$9.12.1 \quad f(q) = \int_0^1 \left(\frac{m}{2} |\dot{q}|^2 - l^2 V(q) \right) dt.$$

Sappiamo che f è di classe C^1 e che le soluzioni del problema 9.9.1 sono i punti stazionari di f . Inoltre, dal lemma 9.13, che dimostriamo fra poco, segue che per f vale la $(PS)_c$ per ogni c in $\mathbb{R}$.

II passo) Fissato un $R > 0$ sia S la sfera in H_0^1 con centro nell'origine e raggio R . Vediamo che se l è abbastanza piccolo allora

$$9.12.2 \quad f(0) < \inf f(S).$$

Infatti se $q \in S$ allora $|q(t)| \leq \int_0^1 |\dot{q}| dt \leq R$ e dunque

$$f(q) \geq \frac{m}{2} R^2 - l^2 \sup \{V(x) \mid |x| \leq R\}.$$

D'altra parte $f(0) = -l^2 V(0)$. A questo punto è evidente che se l è abbastanza piccolo vale la 9.12.2.

Ora è facile vedere che esiste un punto di minimo q_1 per f nella palla B di centro 0 e raggio R : basta considerare una successione che minimizza f in $\overline{B}$, e seguire lo stesso procedimento della prova di 9.5. Dunque esiste una soluzione q_1 in B tale che $f(q_1) \leq f(0)$.

III passo) Vediamo che, fissato un elemento q non nullo in H_0^1 risulta

$$9.12.3 \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} f(sq) = -\infty.$$

Infatti da 9.11 segue che $f(sq) \leq s^2 \frac{m}{2} \int_0^1 |\dot{q}|^2 dt - s^\alpha l c_1 \int_0^1 |q|^\alpha dt + l c_2$.

Poiché $\alpha > 2$ e $c_1 > 0$, vale la 9.12.3.

IV passo) Di conseguenza esiste $\bar{q}$ in H_0^1 tale che $\|\bar{q}\| > R$ e $f(\bar{q}) < \inf f(S)$. Valgono dunque tutte le ipotesi del teorema del passo di montagna, e quindi esiste una soluzione q_2 con $f(q_2) \geq \inf f(S)$. Di conseguenza $q_2 \neq q_1$ perché $f(q_2) > f(q_1)$. $\square$

9.13 Lemma *Se vale l'ipotesi V allora il funzionale f definito in 9.12.1 soddisfa la $(PS)_c$ per ogni c in $\mathbb{R}$.*

Precisamente: se $(q_h)_{h \in \mathbb{N}}$ è una successione in H_0^1 tale che $(f(q_h))_{h \in \mathbb{N}}$ sia superiormente limitata e $(\text{grad} f(q_h))_{h \in \mathbb{N}}$ tenda a 0 allora $(q_h)_{h \in \mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione convergente in H_0^1 .

DIMOSTRAZIONE

I passo) Se $q \in H_0^1$ allora

$$f'(q)(q) = \int_0^1 (m|\dot{q}|^2 - l^2 \text{grad} V(q) \cdot q) dt \leq \int_0^1 (m|\dot{q}|^2 - \alpha l^2 V(q) + l^2 c_0) dt$$

$$\text{D'altra parte} \quad - \int_0^1 \alpha l^2 V(q) dt = \alpha f(q) - \alpha \frac{m}{2} \int_0^1 |\dot{q}|^2 dt.$$

$$\text{Dunque} \quad m \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) \int_0^1 |\dot{q}|^2 dt \leq - \langle \text{grad} f(q), q \rangle_0 + \alpha f(q) + c_0.$$

Se dunque $(q_h)_{h \in \mathbb{N}}$ è una successione in H_0^1 tale che $(f(q_h))_{h \in \mathbb{N}}$ sia superiormente limitata e $(\|\text{grad} f(q_h)\|)_{h \in \mathbb{N}}$ sia limitata, da questa disuguaglianza segue che $(\|q_h\|)_{h \in \mathbb{N}}$ è limitata.

II passo) Poiché, per q e δ in H_0^1 ,

$$\langle \text{grad} f(q) \cdot \delta \rangle = f'(q)(\delta) = \int_0^1 (m\dot{q} \cdot \dot{\delta} - l^2 \text{grad} V(q) \cdot \delta) dt$$

Dall'ipotesi che $\text{grad}f(q_h) \rightarrow 0$ e dal fatto che $(\|q_h\|)_{h \in \mathbb{N}}$ è limitata segue ora che $f'(q_h)(q_h) \rightarrow 0$. Inoltre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, $(q_h)_{h \in \mathbb{N}}$ converge in C^0 e debolmente in H_0^1 ad una q di H_0^1 .

$$\text{Allora} \quad \int_0^1 m |\dot{q}_h|^2 dt \rightarrow \int_0^1 l^2 \text{grad}V(q) \cdot q dt.$$

D'altra parte $f'(q_h)(q) \rightarrow 0$ e dunque

$$\int_0^1 m |\dot{q}|^2 \delta dt = l^2 \int_0^1 \text{grad}V(q) \cdot q dt.$$

Di conseguenza $\|q_h\|_0 \rightarrow \|q\|_0$.

Da questa relazione e dal fatto che $(q_h)_{h \in \mathbb{N}}$ tende a q debolmente in H_0^1 , segue com'è noto che $(q_h)_{h \in \mathbb{N}}$ tende a q in H_0^1 . $\square$

Il secondo passo della dimostrazione precedente ammette una versione che da un certo punto di vista è più comprensibile. Vediamola.

VERSIONE ALTERNATIVA DEL SECONDO PASSO

Sappiamo che $\text{grad}f(q_h) = mq_h + K(q_h)$, dove $K : H_0^1 \rightarrow H_0^1$ è una mappa compatta. Poiché $(q_h)_{h \in \mathbb{N}}$ è limitata $(K(q_h))_{h \in \mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione convergente. Se poi $\text{grad}f(q_h) \rightarrow 0$, anche la corrispondente sottosuccessione di $(q_h)_{h \in \mathbb{N}}$ converge. $\square$

Al termine di questo paragrafo notiamo che il comportamento di f del tipo del passo di montagna è assicurato dalla sola condizione b) di 9.11. L'ipotesi (V) è strettamente più forte, ma quando si assume la condizione b) di 9.11 e non sembra si possa fare a meno di rafforzarla in qualche modo se si vuole assicurare la condizione (PS) .

10 % Alcune orbite periodiche in dinamica

Vogliamo esaminare un problema nel quale si cercano soluzioni periodiche dell'equazione della dinamica. Faremo sempre l'ipotesi che sia presente un campo di forze conservativo, per poter utilizzare un principio variazionale del tipo di Hamilton. nel caso in esame vogliamo studiare l'esistenza di soluzioni di periodo T in dipendenza dal valore di T . Perciò mettiamo subito in evidenza T già nell'equazione.

10.1 Un problema di orbite periodiche di periodo assegnato

Supponiamo dunque che un punto di massa m (naturalmente $m > 0$) sia soggetto al campo di forze associato ad un potenziale $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, di classe C^1 . Sia dato $T > 0$. Vogliamo studiare il problema

$$10.1.1 \quad \begin{cases} m \ddot{q} + \text{grad}V(q) = 0 \\ q \text{ periodica di periodo } T \\ q \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Per mettere in evidenza la dipendenza dal periodo T noi studieremo il problema

$$10.1.2 \quad \begin{cases} m \ddot{q} + T^2 \operatorname{grad} V(q) = 0 \\ q \text{ periodica di periodo } 1 \\ q \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N) \end{cases}$$

È chiaro che se q è una soluzione di questo problema allora l'orbita $\tilde{q}$ definita da $\tilde{q}(t) = q(\frac{t}{T})$ è periodica di periodo T e risolve 10.1.1. Introduciamo ora lo spazio di funzioni e il funzionale che ci servono per impostare il problema in modo variazionale.

10.2 Definizione *Indicheremo con il simbolo H_1^1 lo spazio così definito*

$$H_1^1 = \{q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N \mid q \text{ periodica di periodo } 1, q \in H^1(0, 1; \mathbb{R}^N)\}.$$

Su H_1^1 considereremo ancora il classico funzionale $f : H_1^1 \rightarrow \mathbb{R}$, definito dall'integrale della Lagrangiana associata al sistema di equazioni 10.1.2, e cioè

$$10.2.1 \quad f(q) = \int_0^1 \left(\frac{m}{2} |\dot{q}|^2 - T^2 V(q) \right) dt.$$

Evidentemente risulta ancora che, per ogni q e δ in H_1^1 ,

$$f'(q)(\delta) = \int_a^b (m \dot{q} \cdot \dot{\delta} - T^2 \operatorname{grad} V(q) \cdot \delta) dt.$$

Di conseguenza è del tutto naturale formulare la seguente versione del principio di Hamilton per il problema 10.1.2.

10.3 Un principio di Hamilton per le orbite periodiche

I punti stazionari di f sullo spazio H_1^1 sono le soluzioni di 10.1.2.

In altre parole, le soluzioni di 10.1.2 sono le soluzioni del "problema debole"

$$10.3.1 \quad \begin{cases} \int_0^1 (m \dot{q} \cdot \dot{\delta} - T^2 \operatorname{grad} V(q) \cdot \delta) dt = 0, \text{ per ogni } \delta \text{ in } H_1^1 \\ q \in H_1^1. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE Se infatti una q di H_1^1 verifica la 10.3.1 allora, per ogni fissato intervallo I di ampiezza uguale a 1, la 10.3.1 vale per le δ di $C_0^\infty(I; \mathbb{R}^n)$ (estese con periodo 1 a tutto $\mathbb{R}$). Se ne deduce allora, grazie alle note proprietà della derivata debole, che $q \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ e risolve 10.1.2. Il viceversa è ovvio. $\square$

Per studiare f su H_1^1 ci è utile soffermarci dapprima sulla struttura di questo spazio.

10.4 Definizione

a) Se $q \in H_1^1$ poniamo $\mu(q) = \int_0^1 q \, dt$. Dunque $\mu(q)$ è il vettore di $\mathbb{R}^N$ che è valore medio per q .

b) Considereremo in H_1^1 il prodotto scalare:

$$\langle q, \delta \rangle_1 = \mu(q) \cdot \mu(\delta) + \int_0^1 \dot{q} \cdot \dot{\delta} \, dt \quad \text{e la relativa norma } |||_1$$

c) Utilizzeremo anche gli spazi:

$$L_1^1 = \{q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N \mid q \text{ è periodica di periodo } 1, q \in L^1(0, 1; \mathbb{R}^N)\},$$

con la norma $||q||_{L_1^1} = \int_0^1 |q| \, dt$,

$$\text{e } C_1^0 = \{q \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N) \mid q \text{ è periodica di periodo } 1\}$$

con la usuale norma $||q||_\infty$.

10.5 Lemma

a) Se $q \in H_1^1$ allora $||q - \mu(q)||_\infty \leq \int_0^1 |\dot{q}| \, dt$ e quindi $||q||_\infty^2 \leq 2 ||q||_1^2$.

b) In H_1^1 la norma $|||_1$ è equivalente alla norma canonica

$$\left(\int_0^1 (|q|^2 + |\dot{q}|^2) \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Di conseguenza $H_1^1 \subseteq C_1^0$ e l'immersione è compatta.

c) H_1^1 con il prodotto scalare $\langle, \rangle_1$ è uno spazio di Hilbert.

DIMOSTRAZIONE

a) Se $q \in H_1^1$ allora $q(t) - q(s) = \int_s^t \dot{q}(\tau) \, d\tau$. Integrando rispetto a s , si ottiene: $q(t) - \int_0^1 q(s) \, ds = \int_0^1 \int_s^t \dot{q}(\tau) \, d\tau \, ds$. Allora $|q(t) - \mu(q)| \leq \int_0^1 |\dot{q}| \, dt$, per ogni t in $[0, 1]$.

Di conseguenza $||q||_\infty^2 \leq (|\mu(q)| + ||q - \mu(q)||_\infty)^2 \leq 2 (|\mu(q)|^2 + \int_0^1 |\dot{q}|^2 \, dt)$

b) Se $q \in H_1^1$ dalla parte **a)** si deduce che

$$\int_0^1 |q|^2 \, dt \leq ||q||_\infty^2 \leq 2 ||q||_1^2$$

Se ne deduce che la norma canonica è maggiorata dalla norma $|||_1$. Il viceversa è ovvio.

c) Si tratta di vedere che H_1^1 con la norma $|||_1$ è completo. Sia dunque $(q_h)_{h \in \mathbb{N}}$ una successione in H_1^1 di Cauchy nella norma $|||_1$ e quindi nella norma canonica. Allora su ogni intervallo I di ampiezza 1 la successione $(q_h)_{h \in \mathbb{N}}$ converge ad una q_I di $H^1(I)$. Ma sappiamo che $(q_h)_{h \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente e dunque negli estremi di I la q_I assume lo stesso valore. Per lo stesso motivo, se I_1 e I_2 sono intervalli di ampiezza 1 che si intersecano, q_{I_1} e q_{I_2} coincidono su $I_1 \cap I_2$. Dunque le q_I danno luogo ad una unica q che è periodica di periodo 1 e sta in $H^1(0, 1; \mathbb{R}^N)$. $\square$

10.6 Lemma *Esiste una ed una sola mappa $G : L_1^1 \rightarrow H_1^1$ tale che*

per ogni h in L_1^1 risulti $\langle G(h), \delta \rangle_1 = \int_0^1 h \cdot \delta \, dt$, per ogni δ in H_1^1 ,

Inoltre $\|G(h)\|_1 \leq \sqrt{2} \|h\|_{L_1^1}$.

DIMOSTRAZIONE Sia dato h in L_1^1 . Dal lemma precedente segue che per ogni

δ in H_1^1 risulta: $|\int_0^1 h \cdot \delta \, dt| \leq \|h\|_{L_1^1} \|\delta\|_\infty \leq \sqrt{2} \|h\|_{L_1^1} \|\delta\|_{H_1^1}$.

Dunque, per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste uno ed un solo elemento $G(h)$ in H_1^1 che soddisfa l'uguaglianza richiesta nella tesi.

Di conseguenza $|\langle G(h), \delta \rangle_1| \leq \sqrt{2} \|h\|_{L_1^1} \|\delta\|_{H_1^1}$, per ogni δ in H_1^1 . $\square$

Come avviene nel caso del problema ai limiti anche qui si può per esercizio verificare che G è compatta.

10.7 Proposizione

a) *Il funzionale $f : H_1^1 \rightarrow \mathbb{R}$ introdotto in 10.2.1 è di classe C^1 .*

b) *Se $q \in H_1^1$ risulta:*

$$\text{grad} f(q) = m(q - \mu(q)) + G(\text{grad} V(q))$$

c) *La mappa $K : H_1^1 \rightarrow H_1^1$ che a q associa $K(q) = -m \mu(q) + G(\text{grad} V(q))$ è compatta.*

DIMOSTRAZIONE Vale evidentemente l'uguaglianza

$$\langle \text{grad} f(q), \delta \rangle_1 = f'(q)(\delta), \quad \text{per ogni } \delta \text{ in } H_1^1.$$

Da questa si deduce come al solito (teorema del differenziale totale) che f è differenziabile. Di conseguenza $\text{grad} f$ è proprio quello indicato.

Per verificare la **c)** osserviamo che l'immersione $i : H_1^1 \rightarrow C_1^0$ è compatta e che la mappa $\mathcal{G}_V$ che a q di C_1^0 associa $\text{grad} V(q)$ in L_1^1 è continua. Allora la mappa $K_1 : H_1^1 \rightarrow H_1^1$, definita da $K_1(q) = G(\text{grad} V(q))$ è compatta perché $K_1 = G \circ \mathcal{G}_V \circ i$.

D'altra parte μ definisce un operatore lineare compatto in H_1^1 perché è continuo ed ha l'immagine in $\mathbb{R}^N$. $\square$

Possiamo ora enunciare e provare il risultato al quale è dedicato questo paragrafo, che mostra l'esistenza di infinite orbite periodiche in una buca di potenziale dalle pareti assai ripide. Utilizzeremo ancora l'ipotesi di superlinearità del campo di forze.

10.8 Teorema *Supponiamo che V soddisfi la seguente condizione:*

$$(V) \quad \begin{cases} \text{esistono } \alpha > 2 \text{ e } r_0 > 0 \text{ tali che} \\ 0 < \alpha V(x) \leq V'(x)(x), & \text{almeno per } |x| \geq r_0. \end{cases}$$

Allora per ogni $T > 0$ il problema 10.1.1 ammette una soluzione non costante.

Precisamente: per ogni $T_0 > 0$ esiste un numero naturale k_0 tale che per ogni intero $k \geq k_0$ il problema 10.1.1 ammette una soluzione q_k , non costante, di periodo $T = \frac{T_0}{k}$. Inoltre

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|q_k\|_\infty = +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE

I passo) Dati $T_0 > 0$ e k in $\mathbb{N}^*$ cerchiamo una soluzione di periodo 1 del problema 10.1.2, con $T = \frac{T_0}{k}$. Studiamo perciò sullo spazio H_1^1 il funzionale

$$f(q) = \int_0^1 \left(\frac{m}{2} |\dot{q}|^2 - \frac{T_0^2}{k^2} V(q) \right) dt.$$

Per semplificare supponiamo, come è sempre possibile, che sia $V \geq 0$.

Poniamo $Y = \{q \in H_1^1 \mid q \text{ è costante}\}$ e $Z = \{q \in H_1^1 \mid \mu(q) = 0\}$.

Evidentemente $H_1^1 = Z \oplus Y$ e $Z = \{q \in H_1^1 \mid q \text{ è ortogonale a } Y\}$, rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$.

Per questo basta osservare che se $q \in H_1^1$ allora $q = q - \mu(q) + \mu(q)$ e $q - \mu(q) \in Z$. Il resto è ovvio.

II passo) Dato un numero $\rho > 0$ poniamo $S = \{q \in Z \mid \|q\|_1 = \rho\}$.

Se $q \in S$ allora

$$f(q) = \frac{m}{2} \rho^2 - \frac{T_0^2}{k^2} \int_0^1 V(q) dt \geq \alpha_k = \frac{m}{2} \rho^2 - \frac{T_0^2}{k^2} \sup \{V(x) \mid |x| \leq \rho\},$$

perché se $q \in Z$ allora $\|q\|_\infty \leq \|q\|_1$. Se dunque k è abbastanza grande

$$\inf f(S) \geq \alpha_k > 0.$$

III passo) Notiamo che se $q \in Y$ allora $f(q) \leq 0$ perché $V \geq 0$.

Sia poi $\bar{q}$ un elemento non nullo di Z . Allora

$$\lim_{\|q\|_1 \rightarrow \infty, q \in Y \oplus \text{span}(\bar{q})} f(q) = -\infty.$$

Infatti, dall'osservazione 9.11 segue che

$$f(q) \leq \frac{m}{2} \|q\|_1^2 - \frac{T_0^2}{k^2} \left(c_1 \int_0^1 |q|^\alpha dt - c_2 \right)$$

e nello spazio $Y \oplus \text{span}(\bar{q})$, che ha dimensione finita, la norma $\|q\|_1$ è equivalente alla norma $\left(\int_0^1 |q|^\alpha dt \right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

In conclusione esiste $R > \rho$ tale che, posto

$$\Sigma = \{q + s\bar{q} \mid q \in Y, \|q + s\bar{q}\|_1 = R, s \geq 0\} \cup \{q \in Y \mid \|q\|_1 = R\},$$

risulti che $\sup f(\Sigma) < \inf f(S)$.

IV passo) Vale la $(PS)_c$ per ogni c in $\mathbb{R}$, come si verifica in modo praticamente identico a quello seguito in 9.13, dove infatti si assumeva la stessa ipotesi (V).

Possiamo a questo punto constatare che valgono le ipotesi del teorema di allacciamento 5.4, pur di tenere presente l'osservazione 5.6.

Dunque, se k è abbastanza grande perché risulti

$$\alpha_k = \frac{m}{2}\rho^2 - \frac{T_0^2}{k^2} \sup \{V(x) \mid |x| \leq \rho\} > 0,$$

esiste una soluzione q_k tale che $f(q_k) \geq \alpha_k$. Notiamo che q_k non è una costante perché $f(q_k) > 0$.

V passo) Vediamo infine che $\|q_k\|_\infty \rightarrow \infty$.

Supponiamo che non sia vero. In questo caso, a meno di passare ad una sottosuccessione, risulta che $\|q_k\|_\infty \leq c$, per un certo c di $\mathbb{R}$. Allora, dall'equazione

$$m \ddot{q}_k + \frac{T^2}{k^2} \text{grad} V(q_k) = 0$$

segue che $\|\ddot{q}_k\|_\infty \rightarrow 0$. Di conseguenza anche $\int_0^1 |\dot{q}_k|^2 dt = - \int_0^1 \ddot{q}_k \cdot q_k dt \rightarrow 0$, e quindi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(q_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(\frac{m}{2} |\dot{q}_k|^2 - \frac{T_0^2}{k^2} V(q_k) \right) dt = 0.$$

Invece $f(q_k) \geq \alpha_k \rightarrow \frac{m}{2}\rho^2 > 0$. □

Programma del corso di **PROBABILITA' (070AA)**

Docente: **Maurizio Pratelli**

Anno accademico 2014-15 semestre I

Laurea triennale: III anno o Laurea Magistrale

Numero crediti: 6

Introduzione al corso:

Questa è la naturale prosecuzione del corso "Elementi di Probabilità e Statistica": mentre il primo insiste sui concetti e sulle idee ma si mantiene ad un livello molto elementare (pur restando sempre rigoroso), in questo gli argomenti matematici sono affrontati con maggiore completezza e profondità.

Il corso può essere affrontato al III anno oppure durante la Laurea Magistrale.

Contenuti insegnamento:

Costruzione di una probabilità e dell'integrale rispetto a una probabilità.

Indipendenza di variabili aleatorie, lemmi di Borel-Cantelli e Legge 0-1 di Kolmogorov.

Convergenza di variabili aleatorie e convergenza di Probabilità: criterio di Prohorov.

Le funzioni caratteristiche e legame con la convergenza in Legge.

Teoremi limite: Leggi dei Grandi Numeri e Teoremi Limite Centrale.

Speranza condizionale e sue proprietà. Alcune proprietà degli spazi di Probabilità "*non atomici*".

Primi rudimenti di Teoria dei Processi Stocastici: il processo di Wiener ed il processo di Poisson.

Obiettivi formativi:

Completare la formazione in Calcolo delle Probabilità ed avviare a studi più avanzati su questo argomento.

Prerequisiti:

I corsi di Analisi del primo biennio, rudimenti di analisi complessa e naturalmente il corso di E.P.S.

Testi di riferimento:

Sono resi disponibili appunti scritti dal docente.

Un libro vicino agli argomenti trattati è quello di

Jacod J. Protter P. "*Probability Essentials*" Springer

Modalità didattiche:

Lezioni ed esercitazioni frontali.

Ricerca Operativa (072AA)

Corso di Laurea in Matematica

a.a. 2013/2014

[Antonio Frangioni](#)

Lo scopo del corso è quello di fornire una panoramica (per quanto necessariamente ristretta) sui principali aspetti teorici e pratici inerenti alla costruzione di modelli matematici di sistemi reali, con particolare riferimento ai modelli di ottimizzazione, ed alla loro soluzione algoritmica.

Verranno presentate le proprietà matematiche alla base di alcune delle principali tecniche algoritmiche per la soluzione di tre grandi classi di problemi di ottimizzazione: problemi di programmazione lineare, problemi di cammino e flusso su reti, e problemi di ottimizzazione combinatoria. Verranno discusse le proprietà che rendono alcuni di questi problemi "facili" ed altri "difficili", e l'impatto che esse hanno sugli algoritmi risolutivi disponibili. Verranno inoltre discusse le problematiche relative alla costruzione di modelli matematici che coniughino (per quanto più possibile) la rispondenza del modello alla situazione reale rappresentata con la risolubilità computazionale dello stesso, fornendo tecniche ed esempi applicativi che consentano allo studente di acquisire la capacità di modellare autonomamente i problemi con strumenti che attualmente sono considerati tra i migliori in pratica.

PROGRAMMA DEL CORSO

1. Problemi e Modelli (4 ore)
 - Il processo decisionale
 - Esempi di problemi ottimizzazione
 - Definizioni generali
2. Programmazione Lineare (20 ore)
 - Geometria della Programmazione Lineare
 - Algoritmo del simplesso primale
 - Teoria matematica della dualità
 - Algoritmo del simplesso duale
 - Riottimizzazione ed analisi parametrica
 - Cenni sull'ottimizzazione nonlineare
3. Grafi e Reti di flusso (16 ore)
 - Flusso di costo minimo
 - Cammini di costo minimo
 - Flusso massimo
 - Problemi di accoppiamento
4. Ottimizzazione Combinatoria (20 ore)
 - Ottimizzazione Combinatoria e Programmazione Lineare Intera

- Tecniche di modellazione per la PLI
- Dimostrazioni di ottimalità
- Algoritmi euristici
- Tecniche di rilassamento
- Algoritmi enumerativi

(Le ore indicate includono le esercitazioni)

Testi di riferimento

1. [Appunti del corso](#)
2. Massimo Pappalardo, Mauro Passacantando "Ricerca Operativa", Plus, 2010

Altri testi consultabili

1. F.S. Hillier, G.J. Lieberman, "Introduzione alla ricerca operativa", Franco Angeli, Milano (1999)

Corso di laurea in Matematica
Anno accademico 2014/2015, primo semestre

Corso di Sistemi Dinamici

Docenti: Prof. Andrea MILANI COMPARETTI, Dr. Giacomo Tommei

CONTENUTI DEL CORSO

- [1] **Introduzione:** Sistemi dinamici continui e discreti, lineari e nonlineari, conservativi, integrabili: definizioni ed esempi semplici.
- [2] **Sistemi dinamici lineari:** richiami di algebra lineare, esponenziale di matrici, prodotto di serie, autovalori reali e complessi, nilpotenti, risonanza.
- [3] **Teoria qualitativa:** Richiami sulle soluzioni dei problemi alle condizioni iniziali. Stabilità, instabilità, sorgenti e pozzi, esponenti e funzioni di Lyapounov, sistemi Newtoniani conservativi e con dissipazione, sistemi gradiente, selle, insiemi limite, orbite periodiche, teorema di Poincaré-Bendixon.
- [4] **Sistemi discreti e discretizzazione:** equazioni alle differenze finite lineari, esempi di applicazioni all'economia matematica, metodo di Eulero, errore di troncamento e convergenza, discretizzazione conservativa, mappa standard.
- [5] **Sistemi Hamiltoniani a un grado di libertà:** teorema di Liouville, integrabilità e legge oraria, studio qualitativo, trasformata di Legendre, sistemi lagrangiani, moti vincolati, trasformazioni canoniche, variabili azione-angolo.
- [6] **Caos:** regioni caotiche per la mappa standard, teorema delle separatrici, punti omoclinici, insiemi iperbolici, ferro di cavallo di Smale, regioni ordinate, esponenti di Lyapounov, definizione di caos.

TESTI DI RIFERIMENTO

A. Milani, *Introduzione ai sistemi dinamici*, Seconda edizione riveduta e corretta, Edizioni Plus, Pisa, 2009; 256 pagine + CD-ROM, prezzo 18 euro. Contiene più di 80 esercizi (lo svolgimento degli esercizi e i programmi per alcuni esperimenti numerici sono disponibili sul CD-ROM venduto con il libro).

OBIETTIVI FORMATIVI

Conoscenze di base sull'algebra delle matrici e sui sistemi dinamici lineari, sui concetti di stabilità, equilibrio, integrale primo, sulle equazioni alle differenze finite.

Conoscenze specifiche sulla teoria qualitativa, soprattutto nel piano, sui sistemi conservativi con i formalismi newtoniano, lagrangiano e hamiltoniano, sulla discretizzazione di equazioni differenziali ordinarie, sui sistemi dinamici non integrabili e caotici.

Esempi formativi di applicazioni a sistemi meccanici, economici, a problemi modello.

PREREQUISITI

Vengono ampiamente utilizzati argomenti che fanno parte dei programmi dei corsi del primo biennio, in particolare in Aritmetica, Algebra Lineare e Geometria Analitica, Elementi di Analisi, Analisi in più Variabili 1.

METODI DIDATTICI

Le lezioni e le esercitazioni sono svolte dal prof. Milani. L'orario comprende 6 ore settimanali (più le ore di ricevimento, per cui è disponibile anche il dr. Tommei). Gli studenti sono tenuti a partecipare attivamente, svolgendo esercizi e problemi.

MODALITÀ DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

Esame scritto e orale. Saranno proposti agli studenti due compiti parziali; chi conseguirà una media sufficiente nei due compitini sarà esonerato dallo scritto. Sono previsti 5 appelli per lo scritto (2 a gennaio-febbraio, 2 a giugno-luglio, 1 a settembre), gli orali potranno essere distribuiti in un maggior numero di date, da negoziare caso per caso.

PROGRAMMA DI STATISTICA MATEMATICA}

Docente: Rita Giuliano

Anno Accademico 2013/14

Laurea Triennale, Anno di Corso 3, Secondo semestre

Numero crediti 6

CONTENUTI DELL' INSEGNAMENTO

Statistica Inferenziale: modelli statistici (dominati, regolari). Campioni.

Riassunti esaustivi, teorema di fattorizzazione di Neyman-Fisher.

Modelli esponenziali.

Il meccanismo delle decisioni: criteri di preferibilit .

Teoria della stima: stima ed esaustivit .

\smallskip\noindent

Informazione secondo Fisher e disuguaglianza di Cramer-Rao .

Informazione di Kullback.

Stime di massima verosimiglianza, consistenti e fortemente consistenti. Teorema limite centrale per le stime di massima verosimiglianza.

Variabili gaussiane e vettori gaussiani. Modelli di regressione e modelli lineari. Il teorema di Gauss-Markov.

Campioni gaussiani, Teorema di Cochran.

Teoria dei test: La teoria di Neyman-Pearson. Test unilaterali e bilaterali. Test del rapporto di verosimiglianza.

Test sulla media di un campione Gaussiano, test di Student, test sulla varianza di un campione Gaussiano. Confronto tra due campioni indipendenti: il problema di Behrens -Fisher.

Introduzione ai metodi non parametrici: la funzione di ripartizione empirica, il teorema di Glivenko-Cantelli. Il test del chi-quadro. Test del chi-quadro per l'indipendenza. Il test di Kolmogorov.

TESTI DI RIFERIMENTO. Il corso si baserà principalmente su appunti (da distribuire a lezione).

Ottimi testi sono i seguenti:

—P. Baldi (1997), Calcolo delle Probabilità e Statistica, Mc-Graw Hill Italia, Milano

–D. Dachuna-Castelle, M. Duflo (1986) Probability and Statistics, Springer, New York.

OBIETTIVI FORMATIVI. Il corso fornisce alcuni elementi di Statistica, con particolare attenzione al rigore matematico, oltre che alle applicazioni.

PREREQUISITI. Il corso di " Elementi di Probabilità".

METODO DIDATTICO. Lezioni frontali con alcune esercitazioni.

MODALIT' A' DI VERIFICA DELL'APPRENDIMENTO. Colloquio orale.

Storia della matematica

Anno accademico 2014-2015

Pier Daniele Napolitani

Il corso abbraccia lo sviluppo della matematica in Occidente dai Greci fino alla creazione del calcolo infinitesimale. Si forniranno inoltre anche indicazioni su alcuni sviluppi dell'analisi e dell'algebra nel corso dell'Ottocento.

Non sono richiesti particolari prerequisiti, salvo un forte interesse per la storia e una preparazione matematica corrispondente a quella fornita dalla frequentazione dei primi due anni del corso di laurea in matematica.

Data la vastità del tema, si richiede la lettura di un manuale di storia della matematica; fortemente consigliato è

Morris Kline, *Storia del pensiero matematico. Volume 1: dall'Antichità al Settecento*, a cura di Alberto Conte. Einaudi, Torino, 1999.

L'esame prevede un colloquio che inizierà su un tema scelto dal candidato.

A lezione verranno illustrati e approfonditi alcuni momenti salienti dello sviluppo della matematica in Occidente, e precisamente:

La matematica greca

- caratteri generali della matematica greca;
- Euclide e gli *Elementi*;
- Archimede e la geometria di misura;
- la geometria di posizione: da Apollonio a Pappo; il metodo del- l'analisi e sintesi.

Caratteri della matematica del Rinascimento (XIII-XVI secolo)

- a. La cultura dell'abaco e dell'umanesimo
 - Leonardo Fibonacci e le scuole d'abaco;
 - l'Umanesimo e il recupero della matematica greca; l'invenzione della stampa e la diffusione della cultura scientifica.
- b. Dalla riappropriazione dei Classici a nuovi orizzonti metodologici
 - la *traditio* dell'opera di Archimede, di Apollonio e di Pappo;
 - il problema dei centri di gravità e l'opera di Luca Valerio;
 - François Viète e l'invenzione dell'algebra simbolica.

La nascita della matematica moderna

- La teoria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri;
- La *Géométrie* di René Descartes;
- la nascita delle accademie e delle riviste scientifiche;
- il problema delle tangenti: i metodi di Descartes e di Pierre de Fermat
- il problema delle tangenti il calcolo differenziale di Leibniz
- serie e flussioni: i metodi di Isaac Newton.

Il materiale di approfondimento su questi temi verrà fornito di volta in volta durante il

PROGRAMMA PRELIMINARE DI TEORIA ALGEBRICA DEI NUMERI 1

Docente ILARIA DEL CORSO

Anno Accademico 2014-20015

Richiami di teoria di Galois. Corrispondenza di Galois. Gruppi di Galois delle estensioni ciclotomiche e dei campi finiti.

Estensioni intere di un anello. Norma e traccia. Struttura additiva dell'anello degli interi di un campo dei numeri. L'anello degli interi dei campi quadratici.

Discriminante di una $\mathbb{Q}$ -upla di elementi algebrici. Cambi di base e relazioni fra i discriminanti. Basi intere dei campi ciclotomici. Basi intere costruite mediante polinomi valutati in un generatore intero.

Domini di Dedekind. Gruppo degli ideali frazionari e gruppo delle classi di ideali. Fattorizzazione unica degli ideali nei domini di Dedekind.

Indice di ramificazione e grado di inerzia dei primi nelle estensioni. Formula di connessione con il grado dell'estensione. Il caso delle estensioni di Galois. Teorema di Kummer sullo spezzamento dei primi nelle estensioni. Spezzamento dei primi nei campi quadratici e nei campi ciclotomici.

Estensioni di Galois: gruppi di decomposizione e gruppi di inerzia. Estensioni massimali non ramificate ed estensioni massimali in cui un primo si spezza completamente. Applicazioni ai campi ciclotomici: legge di reciprocità quadratica. Automorfismo di Frobenius per i primi non ramificati. Caratterizzazione dei primi ramificati come quelli che dividono il discriminante del campo.

Teorema del corpo convesso di Minkowski. Finitezza del gruppo delle classi di ideali e determinazione della costante di Minkowski. Finitezza dell'insieme dei campi di numeri che ha un discriminante assegnato. Teorema delle unità di Dirichlet.

TESTI DI RIFERIMENTO

D. Marcus , Number Fields, Springer Verlag 1977.

PREREQUISITI

I prerequisiti per seguire il corso sono costituiti dai programmi di Aritmetica e di Algebra¹. Gioverebbe avere qualche conoscenza dei contenuti del corso di Algebra².