Prefazione

La Geometria Differenziale è nata (nella seconda metà dell'Ottocento, raggiungendo la piena maturità nella prima metà del Novecento) come risposta a un'esigenza molto naturale.

L'Analisi Matematica classica studia le proprietà delle funzioni e delle applicazioni differenziabili definite nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$. Dal punto di vista geometrico, la caratteristica principale dello spazio euclideo è di essere piatto (le rette e i piani, come pure i sottospazi vettoriali di dimensione più alta, non si curvano); e l'Analisi Matematica dipende in maniera sostanziale dalla piattezza dello spazio per le sue costruzioni e argomentazioni di base. Eppure, il mondo non è piatto. Basta guardarsi intorno per notare l'abbondanza, per non dire la prevalenza, di superfici curve; e nella scienza moderna (non solo in Matematica, ma anche in Fisica, Ingegneria, Genetica, Informatica, Economia...) compaiono in continuazione problemi che si sviluppano naturalmente in ambienti geometrici che non sono piatti in nessun senso del termine, e che spesso sono anche di dimensione maggiore di due (nel senso che richiedono più di due parametri per essere descritti). Un esempio tipico è dato dal moto di un corpo vincolato. I vincoli sono spesso rappresentati da quantità che devono essere conservate; quindi il moto si svolge in sottoinsiemi dello spazio dei parametri ove queste quantità assumono valori costanti. Geometricamente, lo spazio dei parametri può anche essere uno spazio euclideo, ma non appena i vincoli non sono lineari il sottoinsieme in cui il moto si svolge si guarda bene dall'essere piatto. Eppure, sempre di velocità e accelerazioni stiamo parlando; deve essere quindi possibile continuare a usare gli strumenti dell'Analisi Matematica, la cui utilità e potenza è stata dimostrata nei secoli.

L'osservazione cruciale è che il Calcolo Differenziale si occupa principalmente di oggetti *locali:* per calcolare la derivata di una funzione in un punto è sufficiente sapere come la funzione si comporta vicino a quel punto, non serve conoscere cosa succede altrove. Dunque dovrebbe essere possibile ricostruire un Calcolo Differenziale in spazi che siano solo localmente fatti come aperti di $\mathbb{R}^n$ (in un senso da precisare!), pur avendo una struttura globale completamente diversa. Questa fu l'intuizione geniale di Riemann, enunciata nel 1854 ampliando idee di Gauss. La sua sistematizzazione completa ha richiesto quasi un secolo e il lavoro di alcuni dei più importanti geometri moderni (Poincaré, Levi-Civita, Lie, Weyl, É. Cartan, Whitney, e molti altri), e ha portato infine all'identificazione delle *varietà differenziabili* (in inglese *differentiable manifolds*) come oggetto principale di studio della Geometria Differenziale.

Il concetto di varietà differenziabile ha dimostrato nei fatti di essere quello giusto: non solo è possibile ritrovare tutti i principali risultati dell'Analisi Matematica classica in questo contesto più generale, ma molte costruzioni geometriche e analitiche si descrivono naturalmente in termini di varietà differenziabili. Il prezzo da pagare è un più elevato livello di astrazione: gli strumenti necessari per lavorare efficacemente con le varietà differenziabili sono molti e non banali (a partire dalla definizione stessa di varietà differenziabile). Scopo di questo libro è proprio fornire un'introduzione alla geometria delle varietà differenziabili, illustrandone le proprietà principali e descrivendo le tecniche e gli strumenti più importanti per il loro uso, in modo da poter fungere da testo di riferimento per chi (matematici, fisici, ingegneri e non solo) si trova a dover/voler usare la Geometria Differenziale anche se non ne ha fatto il proprio campo di studio. Inoltre, selezionando opportunatamente il materiale che si vuole presentare, questo volume può essere usato anche come libro di testo per vari corsi di Geometria Differenziale, di livello variabile fra la laurea magistrale e il dottorato in Matematica, Fisica o Ingegneria, o anche, con un po' più di sforzo, per un terzo anno di una laurea in Matematica.

Descriviamo ora in breve il contenuto di questo libro. Il Capitolo 1 è introduttivo, e raccoglie una serie di risultati di Algebra Lineare e Multilineare (in particolare sul prodotto tensoriale e l'algebra esterna) sovente non trattati, o trattati solo in parte, nei corsi iniziali di Geometria o di Algebra Lineare. Entriamo nel vivo della Geometria Differenziale nel Capitolo 2, dove sono definiti ufficialmente i concetti di varietà e di applicazione differenziabile, come pure lo strumento che permette di collegare l'aspetto geometrico con quello analitico: lo *spazio tangente,* che riunisce in un solo concetto vettori tangenti geometrici e derivate parziali. In questo capitolo daremo anche la definizione di *gruppo di Lie* (una varietà corredata anche da una struttura di gruppo in cui le operazioni sono differenziabili), lo strumento naturale per lo studio delle simmetrie nei problemi geometrici e analitici; e dimostreremo il teorema di Whitney, che mostra come la definizione intrinseca di varietà come spazio costruito localmente come un aperto di $\mathbb{R}^n$ e la definizione estrinseca di varietà quale sottoinsieme sufficientemente regolare di uno spazio euclideo coincidono.

Il Capitolo 3 è dedicato al concetto di fibrato, cruciale per lo studio e le applicazioni della Geometria Differenziale. L'unione disgiunta degli spazi tangenti a una varietà ha a sua volta una struttura di varietà differenziabile, chiamata *fibrato tangente,* che è un primo esempio di *fibrato vettoriale:* un fibrato vettoriale è una varietà ottenuta come unione disgiunta di spazi vettoriali della stessa dimensione, uno per ogni punto di un'altra varietà, detta *base* del fibrato.

In questo capitolo studieremo in dettaglio anche i *campi vettoriali,* che possono essere interpretati come campi di velocità che danno luogo a un flusso lungo la varietà, il moto lungo le *curve integrali* del campo. Dalle curve integrali passeremo alle sottovarietà integrali e al teorema di Frobenius, che applicheremo allo studio dei gruppi di Lie, e in particolare alla dimostrazione della corrispondenza fra i sottogruppi di un gruppo di Lie e precisi sottospazi dello spazio tangente nell'elemento neutro (spazio su cui avremo introdotto una nuova, importante struttura algebrica, quella di *algebra di Lie*). Infine presenteremo una nozione più generale di *fibrato,* e definiremo i *fibrati principali,* discutendo il legame con la teoria dei fibrati vettoriali.

I Capitoli 4 e 5 sono dedicati allo studio delle *forme differenziali,* una generalizzazione globale dei concetti di determinante e di forma multilineare alternante, che permettono di estendere alle varietà concetti quali l'orientabilità o l'integrazione su sottovarietà. Parleremo anche di *varietà con bordo,* e dimostreremo l'importante teorema di Stokes, una generalizzazione molto potente del teorema fondamentale del calcolo. Introdurremo anche il *differenziale esterno* di forme differenziali, che ci permetterà di definire la *coomologia di de Rham* di una varietà. La coomologia di de Rham è un fondamentale invariante algebrico delle varietà, che pur essendo definito per via differenziabile misura in realtà proprietà topologiche globali, come illustrato dal teorema di de Rham.

Fin qui abbiamo trattato proprietà delle varietà che discendono direttamente dalla definizione; gli ultimi tre capitoli invece discutono strutture ulteriori che possono essere messe su una varietà. Nel Capitolo 6 definiremo i concetti di *connessione,* per derivare campi vettoriali su varietà, e di *metrica (pseudo)Riemanniana,* per misurare la lunghezza dei vettori tangenti e delle curve ottenendo su qualsiasi varietà una struttura di spazio metrico; le metriche pseudo-Riemanniane sono indispensabili, per esempio, per lo studio della Relatività Generale. Discuteremo infine brevemente le *varietà simplettiche,* importanti sia come campo di studio a sé stante che per le applicazioni, per esempio in Fisica Matematica.

Infine, il Capitolo 7 e il Capitolo 8 sono un'introduzione alla Geometria Riemanniana, che è probabilmente la generalizzazione più naturale della geometria delle superfici in $\mathbb{R}^3$ (come presentata, per esempio, in [2]). Nel Capitolo 7 studieremo la geometria delle *geodetiche,* curve che svolgono sulle varietà Riemanniane (cioè sulle varietà provviste di una metrica Riemanniana) un ruolo analogo a quello svolto dalle rette negli spazi euclidei; e nel Capitolo 8 introdurremo finalmente il concetto di *curvatura.* Usando i *campi di Jacobi* vedremo come collegare il comportamento delle geodetiche con la curvatura della varietà; classificheremo gli spazi a curvatura costante (e, come previsto, gli spazi euclidei risulteranno essere le uniche varietà semplicemente connesse piatte, cioè con curvatura identicamente nulla); e mostreremo come il segno della curvatura possa avere profonde conseguenze sulla struttura topologica globale delle varietà (teoremi di Cartan-Hadamard, di Bonnet-Myers e di Synge-Weinstein).

Un corso di base di Geometria Differenziale basato su questo testo può essere costruito a partire dalle Sezioni 2.1–2.4 e 2.7 del Capitolo 2, dalle Sezioni 3.1–3.4 del Capitolo 3 e dal Capitolo 4, citando risultati del Capitolo 1 quando servono. Corsi più approfonditi possono procedere in varie direzioni: per esempio le sezioni rimaste dei Capitoli 2 e 3 forniscono una buona introduzione alla teoria dei gruppi di Lie; il Capitolo 5 alla coomologia di de Rham; e i Capitoli 6–8 alla Geometria Riemanniana. Questi ultimi capitoli possono anche essere usati come punto di partenza per un corso di Geometria Riemanniana rivolto a studenti che già conoscono la Geometria Differenziale.

Il testo è corredato da centinaia di Esercizi proposti, che ne formano una componente essenziale. Un libro di Matematica, a qualsiasi livello, è una successione di ragionamenti, presentati uno di seguito all'altro con logica (si spera) impeccabile. Leggendo si viene trasportati dalle argomentazioni, fino ad arrivare in fondo e rendersi conto che non si ha la minima idea del perché l'autore ha seguito un percorso piuttosto che un altro, e (peggio) che non si è in grado di ricostruire autonomamente quel percorso. Per imparare la Matematica non basta leggere; bisogna *fare* Matematica. Gli Esercizi sono lì per aiutarti in questa impresa; e, come ausilio ulteriore, abbiamo adottato uno stile di scrittura che ci permette di rivolgerti direttamente a te, lettore o lettrice. Vogliamo coinvolgerti direttamente nella lettura, rendendo lo studio un'elaborazione attiva di conoscenze e non un assorbimento passivo di nozioni. Oltre a motivazioni esplicite per i concetti che introdurremo, troverai spesso domande dirette che cercheranno di stimolarti a una lettura attiva senza farti accettare nulla per fede (e magari cercheranno di aiutarti a rimanere sveglio se ti capiterà di studiare alle tre di notte. . .). Alcuni passaggi delle dimostrazioni saranno svolti da te in appositi esercizi; e, viceversa, per ciascun esercizio è indicato per quali altre parti del testo è utile.

Due parole sui prerequisiti necessari per la lettura di questo libro. Come avrai capito, useremo tecniche e concetti di Algebra Lineare, di Calcolo Differenziale e Integrale di più variabili reali, e di Topologia Generale e Algebrica. Per l'Algebra Lineare, un buon corso di Geometria del primo anno dovrebbe averti dato tutte le conoscenze che ti servono; i risultati principali che utilizzeremo sono comunque richiamati nel Capitolo 1, e come testo di riferimento ti consigliamo [1]. Per quel che riguarda il Calcolo Differenziale e Integrale, a parte le nozioni di base insegnate in tutti i corsi di Analisi Matematica del secondo anno, citeremo esplicitamente i risultati più avanzati che utilizzeremo; un buon testo di riferimento è [9]. Le nozioni di Topologia Generale necessarie sono veramente solo quelle di base: aperti, funzioni continue, connessione, compattezza e poco più, e solo nel contesto degli spazi metrici; si tratta di materiale che viene presentato in qualsiasi corso del secondo anno di Geometria e spesso anche in quelli di Analisi Matematica. Daremo per note anche alcune idee di base di Topologia Algebrica, in particolare i concetti di rivestimento, di rivestimento universale e di gruppo fondamentale. Se ti fosse necessario, potrai trovare tutto quello che serve (e ben di più) in [23]. Infine, per leggere questo testo non è strettamente necessario conoscere in dettaglio la geometria di curve e superfici in $\mathbb{R}^3$, ma chiaramente averle già incontrate può aiutarti a capire meglio il perché di certe definizioni di Geometria Differenziale, o a farti un'intuizione più precisa su cosa può accadere anche in dimensione più alta. Ovviamente, come testo di riferimento per la teoria di curve e superfici non possiamo non consigliarti il nostro libro precedente [2].

Libri come questo non nascono nel vuoto, e la scelta degli argomenti da trattare e del modo in cui trattarli è stata sicuramente influenzata dai testi su cui noi stessi abbiamo studiato e che abbiamo amato (od odiato, anche se non faremo menzione di questi ultimi...). Fra i tanti disponibili, per letture ulteriori consigliamo i libri di Lee, in particolare [24] per un'introduzione alla Geometria Differenziale moderna; il libro di do Carmo [6] per maggiori informazioni sulla Geometria Riemanniana; il libro di Bott e Tu [4] per una presentazione dei principali concetti della Topologia Algebrica che usa sistematicamente le forme differenziali e la coomologia di de Rham; il classico tomo di Helgason [12] e il più moderno di Hsiang [16] per la teoria dei gruppi di Lie; i libri di Milnor [26] e [27], semplicemente perché scritti incredibilmente bene ed essenziali per proseguire lo studio della Geometria Differenziale e delle sue applicazioni; il testo di Kodaira [20] per un'introduzione alle varietà complesse; e i volumi enciclopedici di Kobayashi e Nomizu [19] e di Spivak [34] per tutto ciò che avresti voluto sapere (e non sei davvero convinto di voler chiedere) sulla Geometria Differenziale classica. E questo è solo l'inizio; la Geometria Differenziale è un campo vitale tuttora in pieno sviluppo, e una sua presentazione completa richiederebbe un'enciclopedia più che un libro.

Infine, il gradito dovere dei ringraziamenti. Prima di tutto, uno di noi (Abate) ha il piacere di dichiarare pubblicamente l'indubbio debito che ha nei confronti di Edoardo Vesentini e Hung-Hsi Wu, che per primi l'hanno introdotto alle delizie della Geometria Differenziale e della Geometria Riemanniana (in particolare l'*imprinting* di Wu risulta evidente negli ultimi due capitoli...). Poi, senza dubbio questo libro non sarebbe mai nato senza l'aiuto, l'assistenza e la pazienza di (in ordine strettamente alfabetico) Francesca Bonadei, Piermarco Cannarsa, Ciro Ciliberto, Roberto Frigerio, Adele Manzella, Jasmin Raissy, e dei nostri studenti di tutti questi anni, che hanno subito varie versioni delle dispense non facendosi sfuggire il più piccolo errore e proponendo versioni alternative di diversi argomenti (gli errori che sicuramente troverai li abbiamo introdotti noi dopo, apposta per lasciare qualcosa da fare anche a te, futuro lettore). E infine anche stavolta un ringraziamento specialissimo a Leonardo, Jacopo, Niccolò, Daniele, Maria Cristina e Raffaele che, pur sempre più convinti che i loro genitori siano in realtà giusto un'appendice semovente di un computer, continuano a distoglierci dalle nostre miserie ricordandoci che c'è un buon motivo per continuare a lottare per rendere il mondo un posto migliore: loro.

Pisa e Roma, aprile 2011

Marco Abate
Francesca Tovena