Correzione terzo compitino, testo B

24 maggio 2010

1 Parte 1

Esercizio 1.1. Procederemo per esclusione, mostrando come alcune funzioni della lista non possano avere il grafico in figura. La prima cosa che possiamo notare è che il grafico della funzione in figura ha simmetria centrale rispetto al punto $(0,0)$. Questo significa che la funzione cercata è dispari.

Possiamo perciò eliminare la funzione $x^2 \cdot \cos x$, che è pari; verifichiamolo:

$$(-x)^2 \cdot \cos(-x) = x^2 \cos x,$$

poiché $\cos(-x) = \cos x$. Si poteva anche notare che è prodotto di funzioni pari. Anche la funzione $x \tan x$ è pari:

$$-x \tan(-x) = -x \cdot -\tan x = x \tan x,$$

poiché $\tan(-x) = -\tan x$. Possiamo quindi eliminarle entrambe dalla lista delle funzioni candidato.

Un'altra cosa che possiamo notare è che la funzione in figura ha derivata positiva nell'origine; questo ci permette di eliminare la funzione $x \sin^2 x$. Infatti, la derivata di $x \sin^2 x$ è $\sin^2 x + 2x \sin x \cos x$ che valutata nell'origine ci da 0.

Verifichiamo infine che la funzione $x \cos x$ è dispari e ha derivata positiva nell'origine. Il fatto che sia dispari segue da:

$$-x \cos(-x) = -x \cos x,$$

ancora poiché la funzione coseno è pari. Inoltre la derivata di $x \cos x$ è $\cos(x) - x \sin(x)$, che valutata nell'origine ci dà 1.

Esercizio 1.2. Per risolvere questo integrale definito basta ricordarsi che la primitiva di $e^{\alpha t}$ (per α diverso da 0) è $\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} + C$. Abbiamo quindi che:

$$\begin{aligned}\int_{\log(1/2)}^{\log 2} e^{2t} dt &= \frac{1}{2} e^{2t} \Big|_{\log(1/2)}^{\log 2} = \frac{1}{2}\left(e^{2\log 2} - e^{2\log(1/2)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{\log 2^2} - e^{\log(1/2)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}.\end{aligned}$$

Esercizio 1.3. Degli esercizi molto simili, sull'argomento dei processi di Poisson, si trovano a pag. 430 del vostro libro. Ad ogni modo, dato un processo di Poisson di media μ, abbiamo che la probabilità che nel dato intervallo di tempo avvengano k eventi è:

$$p(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}.$$

La probabilità che il call center riceva meno di una telefonata in un minuto è quindi data da:

$$\begin{aligned} p(X \leq 1) = p(X=0) + p(X=1) &= \frac{\log 12^0}{0!} e^{-\log 12} + \frac{\log 12^1}{1!} e^{-\log 12} \\ &= \frac{1}{1}\frac{1}{12} + \frac{\log 12}{1}\frac{1}{12} = \frac{1}{12}(1+\log 12). \end{aligned}$$

2 Parte 2

Esercizio 2.1. Per determinare i punti critici della funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \cos x + \int_{-12}^{x} e^{t^3} \sin t \, dt,$$

dobbiamo studiarne la derivata. Per il primo teorema fondamentale del calcolo (pag. 385 del vostro libro di testo) sappiamo che, se g è una funzione continua definita tra $[a, b]$:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)dt = g(x).$$

Quindi, ricordandoci che la derivata della somma è la somma delle derivate abbiamo:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\cos x + \frac{d}{dx}\int_{-12}^{x} e^{t^3}\sin t \, dt = -\sin x + e^{x^3}\sin x = (e^{x^3}-1)\sin x.$$

Dobbiamo studiare ora gli zeri di $(e^{x^3}-1)\sin x$; questa funzione si annulla se e solo se si annulla uno dei suoi fattori.
Cominciamo studiando l'equazione:

$$\sin(x) = 0.$$

La funzione seno, di cui potete trovare il grafico a pag. 261 del vostro libro, si azzera ogni volta che la x è un multiplo intero di π, cioè per $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Studiamo ora l'equazione

$$e^{x^3} - 1 = 0.$$

Portiamo -1 al secondo membro ed otteniamo quindi l'equazione

$$e^{x^3} = 1.$$

Applicando il logaritmo naturale a entrambi i membri dell'equazione troviamo

$$x^3 = 0,$$

che è verificata solo se $x = 0$.

Quindi i punti critici della funzione sono i punti del tipo $x = k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$ (il punto $x = 0$ è compreso in questo insieme, basta prendere $k = 0$).

Esercizio 2.2. Studiamo la funzione

$$p(x) = 100\frac{x^2-2x}{x^2-2x+2}.$$

Ne troviamo innanzitutto il dominio di definizione: ci chiediamo quindi per quali valori di x abbiamo che x^2-2x+2 è nullo. Dobbiamo risolvere un'equazione di secondo grado: calcoliamo il discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4.$$

Poichè il discriminante è minore di 0 l'equazione non ha soluzioni reali e quindi la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, poiché il coefficiente di x^2 è positivo, possiamo anche affermare che il denominatore sarà sempre positivo.

Guardiamo ora se la funzione è pari o dispari:

$$p(-x) = 100\frac{(-x)^2 - 2(-x)}{(-x)^2 - 2(-x) + 2} = 100\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 2}.$$

In particolare $p(-1) = 60 \neq \pm(-100) = \pm p(1)$, per cui la funzione non è né pari né dispari.

Studiamo ora il segno della funzione. Come abbiamo visto sopra, poiché il denominatore è sempre positivo, il segno dipende solo dal numeratore, così come l'annullarsi della funzione dipende solo dall'annullarsi del numeratore. Studiamo dunque la disequazione:

$$x^2 - 2x > 0.$$

Il grafico della funzione $x^2 - 2x$ è una parabola che passa per i punti $(0, 0)$ e $(2, 0)$ (cioè il numeratore si annulla in 0 e 2) con la concavità rivolta verso l'alto. Il numeratore sarà quindi positivo per $x < 0$ o $x > 2$. Visto che il segno della funzione è il segno del numeratore, la funzione sarà negativa per $0 < x < 2$, positiva per $x < 0$ o $x > 2$ e si annullerà in 0 e 2.

Studiamo ora il limite a $+\infty$ della funzione:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} p(x) &= \lim_{x\to+\infty} 100\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 2} = 100 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} \\ &= 100 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = 100.\end{aligned}$$

Il limite a $-\infty$ si calcola in modo analogo:

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = 100 \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = 100.$$

Quindi la funzione ha asintoto orizzontale sia a $+\infty$ sia a $-\infty$.

Studiamo ora la derivata prima della funzione $p(x)$. Per calcolarla useremo la formula per la derivata di un quoziente:

$$p'(x) = 100 \cdot \frac{(x^2 - 2x)'(x^2 - 2x + 2) - (x^2 - 2x + 2)'(x^2 - 2x)}{(x^2 - 2x + 2)^2},$$

dove con l'apice ho indicato che devo prendere la derivata prima di ciò che è tra parentesi. La derivata prima sarà quindi:

$$p'(x) = 100 \cdot \frac{(2x - 2)(x^2 - 2x + 2) - (2x - 2)(x^2 - 2x)}{(x^2 - 2x + 2)^2} = 400 \cdot \frac{x - 1}{(x^2 - 2x + 2)^2}.$$

Come prima, poiché il denominatore ha sempre segno positivo, lo studio del segno di questa derivata si riduce allo studio del segno del numeratore, cioè alla seguente disequazione: $x - 1 > 0$, che è verificata per $x > 1$. Abbiamo dunque che la funzione è decrescente per $x < 1$, ha un minimo in $x = 1$, dove varrà -100 ed è crescente per $x > 1$.

Studiamo ora la derivata seconda della funzione. Abbiamo che:

$$p''(x) = 400 \cdot \frac{(x-1)'(x^2-2x+2)^2 - ((x^2-2x+2)^2)'(x-1)}{(x^2-2x+2)^4}.$$

Per calcolare $((x^2 - 2x + 2)^2)'$ usiamo la formula di derivazione per funzioni composte. Posto $y(x) = x^2 - 2x + 2$ otteniamo:

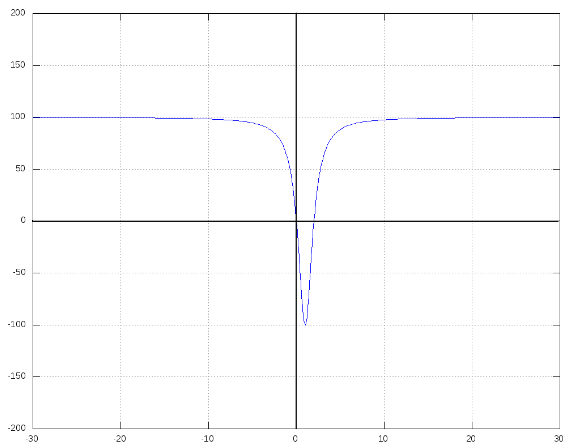
$$((x^2-2x+2)^2)' = (y(x)^2)' = 2y(x)y'(x) = 2(x^2-2x+2)(2x-2).$$

Quindi:

$$\begin{aligned} p''(x) &= 400 \cdot \frac{(x^2-2x+2)^2 - 2(x^2-2x+2)(2x-2)(x-1)}{(x^2-2x+2)^4} \\ &= 400 \cdot \frac{x^2-2x+2-4(x-1)^2}{(x^2-2x+2)^3} = 400 \cdot \frac{-3x^2+6x-2}{(x^2-2x+2)^3}. \end{aligned}$$

Come prima, il denominatore non influisce sul segno: studiamo perciò la disequazione $-3x^2 + 6x - 2 > 0$. Il grafico della funzione è una parabola che taglia l'asse delle ascisse nei punti $1 \pm \sqrt{3}/3$, con la concavità rivolta verso il basso. Per cui la derivata seconda della funzione sarà positiva per $1 - \sqrt{3}/3 < x < 1 + \sqrt{3}/3$, quindi la funzione avrà concavità verso l'alto per $1 - \sqrt{3}/3 < x < 1 + \sqrt{3}/3$.

Sulla base di quanto studiato, possiamo disegnare il grafico della funzione, che sarà il seguente.



Possiamo ora rispondere alle domande del testo; studiando il limite a $+\infty$ sappiamo infatti che l'effetto percentuale della medicina per quantità molto grandi tende ad essere del 100%; inoltre per quantità positive la funzione può assumere tutti i valori compresi nell'intervallo $[-100, 100)$. Infine, osservando il grafico possiamo accorgerci che ci sono dei valori di x per cui il nostro modello non ha alcun senso: come può l'effetto percentuale di un farmaco essere negativo? Per cui, il modello può essere attendibile solo per $x \geq 2$.

Esercizio 2.3. Consideriamo la variabile aleatoria reale X la cui funzione di distribuzione $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ è data da

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq -1; \\ \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} & \text{per } -1 \leq t \leq 1; \\ 1 & \text{per } t \geq 1. \end{cases}$$

Vogliamo innanzitutto calcolarne la densità di probabilità. Vi rimandiamo a pag. 440 del vostro libro di testo per la dimostrazione che la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua è la derivata della funzione di distribuzione. Perciò visto che la funzione di distribuzione è definita a tratti faremo la derivata sui singoli intervalli di definizione:

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq -1; \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} & \text{per } -1 \leq t \leq 1; \\ 0 & \text{per } t \geq 1. \end{cases}$$

Ora, per calcolare il valore atteso, facciamo riferimento alla formula a pag. 437. Questo è dato da

$$\begin{aligned} E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)dt &= \int_{-\infty}^{-1} t \cdot 0\, dt + \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(t+1)t\, dt + \int_{1}^{+\infty} t \cdot 0\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (t^2 + t)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Possiamo ora calcolare la varianza della variabile aleatoria, sempre facendo riferimento alla formula a pag. 437:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(t - E(X)\big)^2 f_X(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \left(t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{9}\right)(t+1)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} t^3 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{9}t + t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{9}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} t^3 + \frac{1}{3}t^2 - \frac{5}{9}t + \frac{1}{9}dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{9} - \frac{5}{18}t^2 + \frac{1}{9}t\right)\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{5}{18} + \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{5}{18} - \frac{1}{9}\right)\right) \\ &= \frac{2}{9}. \end{aligned}$$