

# Geometria e Topologia Differenziale

Terzo compito A.A. 2007/08

Consegna il 7 gennaio 2008

Nome e Cognome:

---

1) Considera l'applicazione  $\psi: (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da:

$$\psi(t, s) = ((2 + e^{-t^2} \cos s) \cos t, (2 + e^{-t^2} \cos s) \sin t, e^{-t^2} \sin s),$$

e sia  $\Sigma = \psi((-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R})$ . Per ogni  $a \in \mathbb{R}$  sia  $\gamma_a: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \Sigma$  data da  $\gamma_a(v) = \psi(v, a)$ , e per ogni  $b \in (-\pi/2, \pi/2)$  sia  $\sigma_b: \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$  data da  $\sigma_b(u) = \psi(b, u)$ .

- (i) Dimostra che  $\Sigma$  è una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ , e che  $\psi$  è una superficie immersa.
- (ii) Determina un campo  $N: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  di vettori normali non nulli, e determina i punti di  $p \in \Sigma$  in cui  $N(p)$  è orizzontale (cioè ha componente verticale nulla), e i punti  $p \in \Sigma$  in cui lo spazio vettoriale generato da  $p$  e  $N(p)$  è verticale (cioè contiene l'asse delle  $z$ ).
- (iii) Mostra che per ogni  $b \in (-\pi/2, \pi/2)$  la curva  $\sigma_b$  è regolare e parametrizzata per un multiplo della lunghezza d'arco, e determina i valori di  $b$  per cui  $\sigma_b$  sia una geodetica. [*Suggerimento*: osserva che il sostegno di  $\sigma_b$  è contenuto in un sottospazio vettoriale verticale di  $\mathbb{R}^3$ .]
- (iv) Mostra che per ogni  $a \in \mathbb{R}$  la curva  $\gamma_a$  è regolare. Determina i valori di  $a$  per cui una opportuna parametrizzazione di  $\gamma_a$  sia una geodetica. [*Suggerimento*: osserva che esiste un istante in cui il versore normale a  $\gamma_a$  è orizzontale.]

2) Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  l'insieme definito da

$$S = \{(x, y, z) \mid 5x^2 - 8xy + 5y^2 + 9z^2 = 18\},$$

e sia  $v: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  la mappa definita da

$$v(x, y, z) = (4x^2 + 5y^2 - 9xy + 9z^2, 5x^2 + 4y^2 - 9xy + 9z^2, -z(x + y)).$$

- (i) Mostra che  $S$  è una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ , diffeomorfa a  $S^2$ . [*Suggerimento*: l'isomorfismo lineare  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $h(x, y, z) = ((2x - y)/3, (-x + 2y)/3, z)$  si restringe ad un diffeomorfismo tra  $S$  e  $h(S)$ .]
- (ii) Mostra che  $v$  è un campo vettoriale su  $S$ , e determinane i punti singolari.
- (iii) Determina esplicitamente delle isometrie  $F_1, F_2, F_3: S \rightarrow S$  distinte dall'identità che verifichino le proprietà seguenti:
  - (a)  $F_1(p) = p$  per ogni  $p \in S \cap \{x + y = 0\}$ ;
  - (b)  $F_2(p) = p$  per ogni  $p \in S \cap \{x - y = 0\}$ ;
  - (c)  $F_3(p) = p$  per ogni  $p \in S \cap \{z = 0\}$ .
- (iv) Calcola l'indice dei punti singolari di  $v$ .
- (v) Sia  $R$  la regione regolare di  $S$  definita da  $R = S \cap \{x + y \geq 0, x - y \geq 0, z \geq 0\}$ , e sia  $K: S \rightarrow \mathbb{R}$  la curvatura Gaussiana. Calcola  $\int_R K d\nu$ .

3) Chiamiamo *ovaloide* una superficie compatta di  $\mathbb{R}^3$  che abbia in ogni punto curvatura Gaussiana positiva. Si può dimostrare che, se  $S$  è un ovaloide, allora  $S$  è orientabile, e la scelta di un campo normale unitario  $N: S \rightarrow S^2$  definisce un diffeomorfismo di  $S$  su  $S^2$  (nel seguito potrai sfruttare quanto appena affermato).

Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  un ovaloide con mappa di Gauss  $N: S \rightarrow S^2$ . Per ogni  $p \in S$  siano  $\kappa_1(p), \kappa_2(p)$  le curvature principali di  $S$  in  $p$ , ordinate in modo che  $\kappa_1(p) \leq \kappa_2(p)$ .

- (i) Mostra che, a meno di sostituire  $N$  con  $-N$ , esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $\varepsilon \leq \kappa_1(p) \leq \kappa_2(p)$  per ogni  $p \in S$  (e supponi d'ora in poi che questa condizione sia verificata).

- (ii) Mostra che esiste un unico diffeomorfismo  $\varphi: S \rightarrow S$  tale che  $N \circ \varphi = -N$ , e deducine che per ogni  $p \in S$  si ha  $T_{\varphi(p)}S = T_pS$ , per cui  $d\varphi_p$  può essere considerato un endomorfismo di  $T_pS$ . [Continua dietro.]
- (iii) Mostra che per ogni  $p \in S$  e  $v \in T_pS$  si ha  $d\varphi_p(v) \neq v$ .

Nel resto di questo esercizio supponi che esista una costante  $c \in \mathbb{R}$  tale che  $\|\varphi(p) - p\| = c$  per ogni  $p \in S$  (in questo caso, si dice che l'ovaloide  $S$  ha *larghezza costante*).

- (iv) Mostra che per ogni  $p \in S$  si ha  $\varphi(p) - p = c \cdot N(p)$ .
- (v) Mostra che, se  $v \in T_pS$  con  $\|v\| = 1$  definisce una direzione principale in  $p$  con  $Q_p(v) = k$ , allora  $ck - 1 \neq 0$  e  $v$  definisce una direzione principale in  $\varphi(p)$  con  $Q_{\varphi(p)}(v) = k/(ck - 1)$ .
- (vi) Mostra che, se la curvatura Gaussiana di  $S$  è costante, allora  $S$  è una sfera.