ANNO ACCADEMICO 2015–16

SCIENZE GEOLOGICHE E *SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI*

MATEMATICA

SECONDO COMPITINO — TESTO B

PROFF. MARCO ABATE E MARGHERITA LELLI-CHIESA

1 aprile 2016

Nome e cognome____

Corso di studio____

Matricola____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo "0.5" o "No" non saranno valutate anche se giuste.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compitino sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima sia la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Calcola la derivata della funzione $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$F(z) = e^{\cos(2+z^3)} .$$

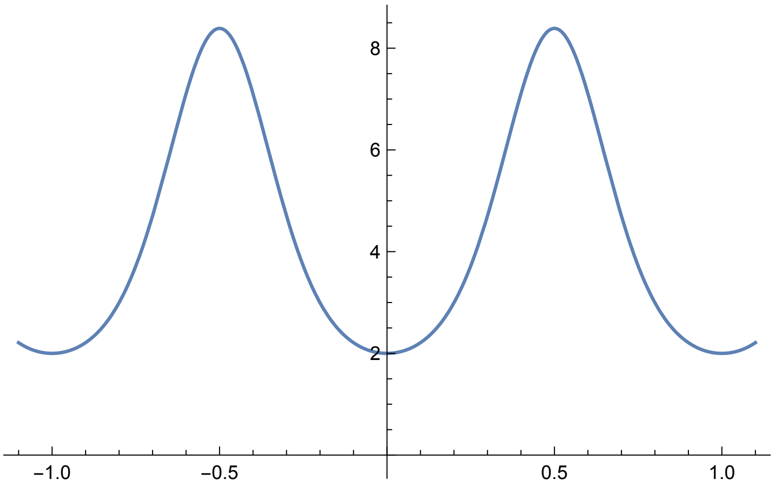
Esercizio 2. La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(t) = \log[1 + \sin^2(6t)]$$

è periodica? Se pensi che lo sia, determina il periodo; se pensi che non lo sia spiega perché.

Esercizio 3. Stabilisci (giustificando la risposta) quale delle funzioni seguenti può avere un grafico come quello in figura:

(a) $e^{1+\sin^2(2\pi x)}$;
(b) $1 + e^{\sin^2(2\pi x)}$;
(c) $e^{\cos^2(2\pi x)}$;
(d) $1 + e^{1-\cos(2\pi x)}$.



SECONDA PARTE

Esercizio 4. Trova un esempio

(i) di una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ decrescente, con $f(0) = 2$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$;

(ii) di una funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pari e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, tale che la retta tangente al suo grafico in $x_0 = -1$ abbia equazione $y = -8x - 6$;

(iii) di una funzione $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua su tutto $\mathbb{R}$ e che abbia come insieme immagine l'intervallo aperto $(1, 3)$.

Esercizio 5. Un'indagine idrogeologica ha studiato il legame fra la percentuale di carbonato di calcio presente nell'acqua di una falda acquifera nella zona di Montalcino e la pioggia caduta nel mese precedente, misurata in centimetri. I dati raccolti sono riassunti nella seguente tabella:

cm di pioggia	%
4	$5.6 \cdot 10^{-5}$
6	$4 \cdot 10^{-5}$
8	$2.4 \cdot 10^{-5}$
10	$1.6 \cdot 10^{-5}$

(i) Determina un modello matematico del legame fra la pioggia e la percentuale di carbonato di calcio trovando un polinomio di terzo grado
$$P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$
che interpoli esattamente i dati (cioè tale che $P(4) = 5.6 \cdot 10^{-5}$, $P(6) = 4 \cdot 10^{-5}$ e così via).

(ii) Secondo questo modello, qual è la percentuale di carbonato di calcio presente nella falda se il mese precedente non ha piovuto?

(iii) Per quale intervallo di valori della variabile x ritieni che la funzione P che hai trovato possa rappresentare realisticamente il fenomeno, tenendo presente che la percentuale di carbonato di calcio non può superare il 10^{-3}%? [*Suggerimento:* l'equazione $x^3 - 18x^2 + 56x + 336 = 6 \cdot 10^3$ ha come unica soluzione reale $x_0 \simeq 24.8917$.]

Esercizio 6. Sei a capo di una spedizione naturalistica nelle foreste della Malesia. Partendo dal villaggio A dovete raggiungere un lago B che potrebbe ospitare una colonia di rarissime salamandre cucurbitacee. Il lago B si trova a 8 chilometri a sud e 24 chilometri a est rispetto ad A; fra il villaggio e il lago si trova una fitta foresta tropicale per i primi 2 chilometri a sud, seguita da una zona paludosa per altri 6 chilometri. La spedizione riesce a procedere alla velocità di 3 chilometri all'ora nella foresta, e di 4 chilometri all'ora nella palude. Per non rischiare di perderti, decidi di procedere in linea retta fino a un punto P che si trova sul segmento orizzontale che congiunge B al punto H posto esattamente 8 chilometri a sud di A, e poi di procedere verso est da P fino a B.

(i) Indicando con $x \in [0, 24]$ la distanza in chilometri fra P e B, determina il tempo $T(x)$ che impieghi per andare da A a P a B. [*Suggerimento:* può essere utile il teorema di Talete che implica che una retta parallela a un lato di un triangolo taglia gli altri due lati in segmenti proporzionali.]

(ii) Trova il valore di x per cui il tempo $T(x)$ impiegato per il percorso è minimo.

(iii) Risolvi lo stesso problema supponendo che nella palude la spedizione proceda alla velocità di 3.3 chilometri all'ora.