Geometria e Topologia Differenziale

Quarto scritto — 2 luglio 2009

Nome e Cognome: Anno d'immatricolazione:

---

1) Siano dati $p \in \mathbb{R}^2$ e due curve chiuse continue $\sigma_0, \sigma_1 \colon [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$. Dimostra che σ_0 e σ_1 hanno lo stesso indice di avvolgimento rispetto a p se e solo se esiste un'omotopia $\Phi \colon [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ fra σ_0 e σ_1.

2) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazione $x^2 + y^2 = z$, orientata in modo da avere versore normale sempre diretto nella direzione delle z positive, e sia $P = (0,0,0)$.

(i) Dimostra che S è una superficie regolare.
(ii) Calcola la seconda forma fondamentale di S nel punto P.
(iii) Determina una geodetica di S passante per P.
(iv) Determina tutte le geodetiche di S passanti per P.

3) Sia $T \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazione $x^2 + y^2 = 1 - z$, orientata in modo da avere versore normale sempre diretto nella direzione delle z negative, sia S la superficie dell'esercizio precedente e sia $C = S \cap T$.

(i) Calcola la curvatura normale di C in tutti i suoi punti, considerata come curva in S.
(ii) Calcola la curvatura normale di C in tutti i suoi punti, considerata come curva in T.
(iii) Sia R la regione di S delimitata da C e contenente P. Calcolare l'integrale della curvatura gaussiana di S sulla regione R.