Geometria e Topologia Differenziale

Primo scritto dell'A.A. 2003-04 — 3 giugno 2004

Nome e Cognome:

---

1) Sia $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva biregolare data da

$$\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, t).$$

Calcola la curvatura, la torsione e il riferimento di Frenet di σ in tutti i suoi punti.

2) (i) Sia S una superficie regolare. Dimostra che un punto $p \in S$ è ombelicale se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $Q_p = \lambda I_p$.

(ii) Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ l'ellissoide di equazione

$$\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{5}y^2 + z^2 = 1,$$

e sia $\varphi: (0, \pi) \times \mathbb{R} \to E$ l'applicazione data da

$$\varphi(u, v) = (3 \sin u \cos v, \sqrt{5} \sin u \sin v, \cos u).$$

Dimostra che per ogni $c \in \mathbb{R}$ la restrizione di φ a $(0, \pi) \times (c, c + 2\pi)$ è una parametrizzazione locale di E.

(iii) Trova i punti ombelicali di E.

3) Sia $T \subset \mathbb{R}^3$ il toro ottenuto ruotando attorno all'asse z la circonferenza nel piano (y, z) di centro $(0, 2, 0)$ e raggio 1. Sia $R \subset T$ la regione regolare data da

$$R = \{p = (x, y, z) \in T \mid x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Calcola l'integrale su R della curvatura Gaussiana K di T.