Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Quinto scritto A.A. 2015/16 — 20 gennaio 2017

Nome e Cognome:

---

1) Sia $\tilde{F}\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ l'applicazione data da

$$\tilde{F}(x,y,z)=(xy,xz,yz,x^2-y^2),$$

e indichiamo con F la restrizione di $\tilde{F}$ a $S^2\subset\mathbb{R}^3$.
(i) Dimostra che F induce una mappa $\varphi\colon\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^4$ di classe C^∞.
(ii) Dimostra che φ è un embedding di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^4$.

2) Sia M una varietà differenziale. Dato un campo vettoriale $X\in\mathcal{T}(M)$, la *contrazione* per X è l'operatore $\iota_X\colon A^\bullet(M)\to\colon A^{\bullet-1}(M)$ dato da $\iota_X(f)\equiv 0$ per ogni $f\in C^\infty(M)=A^0(M)$ e da

$$(\iota_X\omega)_p(v_1,\dots,v_{k-1})=\omega_p\bigl(X(p),v_1,\dots,v_{k-1}\bigr)$$

per ogni k-forma $\omega\in A^k(M)$, dove $p\in M$ e $v_1,\dots,v_{k-1}\in T_pM$ sono qualsiasi.
(i) Dati $\phi_1,\dots,\phi_k\in A^1(M)$, dimostra che

$$\iota_X(\phi_1\wedge\cdots\wedge\phi_k)=\sum_{j=1}^k(-1)^{j-1}\phi_j(X)\phi_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\phi_j}\wedge\cdots\wedge\phi_k\;.$$

(ii) Date $\omega\in A^k(M)$ e $\eta\in A^\bullet(M)$ dimostra che

$$\iota_X(\omega\wedge\eta)=(\iota_X\omega)\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge(\iota_X\eta)\;.$$

3) Sia G un gruppo di Lie; indichiamo con e il suo elemento neutro, e con $\mathfrak{g}$ lo spazio tangente T_eG. Per ogni $h\in G$ indichiamo con L_h la *traslazione sinistra* $L_h(x)=hx$ e con R_h la *traslazione destra* $R_h(x)=xh$. L'*automorfismo interno* $C_h\colon G\to G$ indotto da h è il coniugio $C_h(x)=hxh^{-1}$. La *rappresentazione aggiunta* associata ad h è l'endomorfismo lineare $\mathrm{Ad}(h)\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ dato da $\mathrm{Ad}(h)(v)=d(C_h)_e(v)$ per ogni $v\in\mathfrak{g}$. Infine, una metrica Riemanniana g su G è detta *bi-invariante* se L_h e R_h sono delle g-isometrie per ogni $h\in G$.

Sia $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ un prodotto scalare definito positivo su $\mathfrak{g}$. Dimostra che esiste una metrica Riemanniana bi-invariante g su G tale che $g_e(v,w)=\langle v,w\rangle$ per ogni v, $w\in\mathfrak{g}$ se e solo se tutte le rappresentazioni aggiunte $\mathrm{Ad}(h)$ sono isometrie di $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$.