

ANNO ACCADEMICO 2017–18  
SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI  
**MATEMATICA**  
**SECONDO SCRITTO — TESTO B**  
PROFF. MARCO ABATE E FILIPPO DISANTO

9 luglio 2018

Nome e cognome \_\_\_\_\_

Matricola \_\_\_\_\_

**ISTRUZIONI:** Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compito sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compito è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

*Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!*

## PRIMA PARTE

**Esercizio 1.** Determina il dominio e calcola la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

**Esercizio 2.** Calcola il seguente integrale definito:

$$\int_0^7 \left(1 + \frac{x}{7}\right)^6 dx.$$

**Esercizio 3.** Il *Partito geometrico (PG)* si è presentato alle elezioni comunali del 2013 e del 2018 di Sesti ed Uniti, paese che conta ben 400 abitanti. Può succedere che il PG abbia preso nel 2018 meno voti rispetto al 2013, e contemporaneamente la percentuale di voti che ha ricevuto (rispetto al totale dei votanti) sia più alta nel 2018 rispetto alla percentuale del 2013? Se pensi che sia possibile fai un esempio di distribuzione di voti che realizzi questa situazione; se pensi che non sia possibile spiega perché.

SECONDA PARTE

**Esercizio 4.** Trova un esempio di:

- (i) una funzione  $f_1$  definita e continua su tutto  $\mathbb{R}$  avente esattamente due punti di minimo.
- (ii) una funzione  $f_2$  definita su tutto  $\mathbb{R}$  tale che la sua immagine sia l'intervallo  $[0, 1)$ .
- (iii) una funzione  $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e tale che l'equazione  $[f_3(x)]^2 = 1$  sia soddisfatta se e soltanto se  $x$  è un numero intero.

**Esercizio 5.** Al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$  studia (cioè determina per quali valori del parametro ammette soluzione, e per quei valori trova le soluzioni) il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + (2a - 3)y + (a - 1)z = 3 - a , \\ (a - 1)x + y + z = 1 , \\ ax + 2y + az = a , \\ 2x + ay + (2a - 2)z = 4 - a . \end{cases}$$

[*Suggerimento:* quando trovi un polinomio di secondo grado decomponilo nel prodotto di due polinomi di primo grado.]

**Esercizio 6.** Popolazioni di ratti si sviluppano in genere secondo il modello

$$R(t) = e^{at^2+bt+c},$$

dove  $a, b, c$  sono parametri del modello e  $R(t)$  denota il numero di ratti presenti al tempo  $t$ . La tua popolazione di ratti da laboratorio conta al tempo  $t = 0$  un numero  $R(0)$  di individui approssimabile con  $\ln(R(0)) \approx 3$ . Inoltre, verifichi sperimentalmente che per la tua colonia di cavie la funzione  $R(t)$  soddisfa anche l'equazione differenziale

$$R'(t) = (4 - 4t) R(t).$$

- (1) Trova per quali valori di  $a, b, c$  il modello generale descrive lo sviluppo della tua popolazione di ratti.
- (2) Per tali valori di  $a, b$  e  $c$  studia la funzione  $R$  nella semiretta  $[0, +\infty)$ .
- (3) Trova in quale istante  $t_{\max} > 0$  il tuo gruppo di ratti conta il massimo numero di individui.