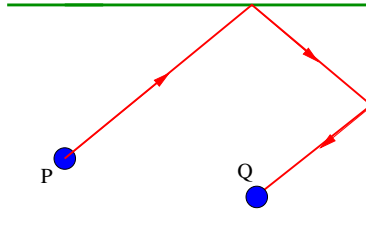


Biliardi matematici - Problemi e soluzioni

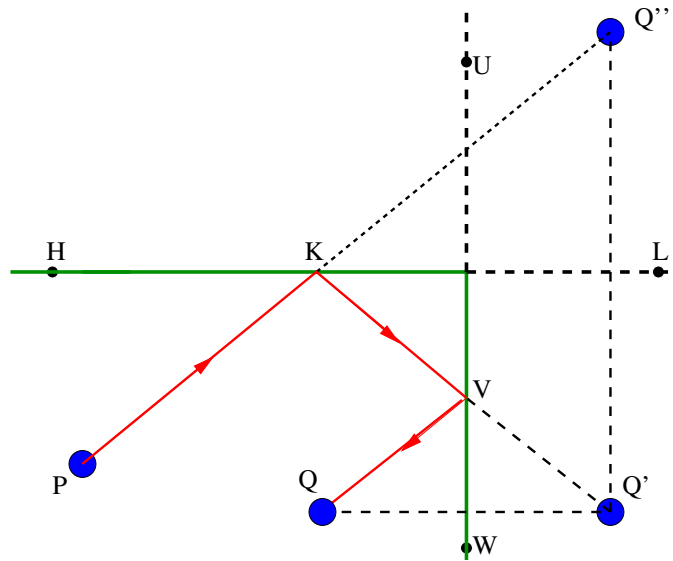
Alberto Abbondandolo

Alfaclass Update, 20-22 maggio 2011

Due sponde. Si considerino due punti P e Q all'interno di un biliardo rettangolare, come in figura. Spiegare dove occorre mirare in modo che la palla inizialmente in P arrivi in Q , dopo aver rimbalzato sulla sponda superiore e su quella di destra.



Soluzione. La riflessione rispetto alla sponda di destra manda il punto Q nel punto Q' . La riflessione rispetto alla sponda superiore manda questo nuovo punto Q' nel punto Q'' (si veda la figura).



Affermiamo che se la palla inizialmente in P viene lanciata nella direzione della retta PQ'' , essa raggiunge il punto Q dopo aver rimbalzato sulle due sponde prescritte.

Vediamo perché. Per costruzione, l'angolo $\widehat{Q'KL}$ è uguale all'angolo $\widehat{LKQ''}$. Quest'ultimo è anche uguale all'angolo \widehat{PKH} perché angoli opposti al vertice. Allora l'angolo \widehat{PKH} è uguale all'angolo $\widehat{Q'KL}$, perciò in assenza della sponda di destra la palla che da P si muove in direzione di Q'' dopo aver rimbalzato sulla sponda superiore si muove in direzione di Q' . Lo stesso ragionamento mostra che gli angoli \widehat{KVU} e $\widehat{Q'VW}$ sono uguali, pertanto il secondo rimbalzo fa andare la palla verso Q , come richiesto.

Densità. La mappa associata ad un biliardo circolare è

$$F(s, t) = (s + 2t, t), \quad s \in \mathbb{R} \pmod{2\pi}, \quad 0 < t < \pi.$$

Dimostrare che se t è un multiplo irrazionale di π , allora l'insieme dei punti di rimbalzo è denso nella sponda. In altre parole: se ad un punto su una circonferenza applichiamo ripetutamente una rotazione di un angolo incommensurabile con π , riusciamo ad arrivare arbitrariamente vicino ad un qualsiasi altro punto fissato.

Soluzione. Sia R la rotazione di angolo α , tale che α/π sia irrazionale, sia x un punto della circonferenza (che supponiamo di raggio 1) e sia I un arco della circonferenza di lunghezza positiva. Dobbiamo dimostrare che esiste un numero naturale n tale che $R^n(x)$ appartiene a I .

La prima osservazione è che i punti $R^h(x)$, al variare di $h \in \mathbb{N}$, sono due a due distinti. Infatti, se esistessero numeri naturali $k > h \geq 0$ tali che $R^k(x) = R^h(x)$ allora

$$x + k\alpha = x + h\alpha + 2m\pi,$$

per un opportuno intero m . Da questa identità ricaviamo,

$$\alpha = \frac{2m}{k-h}\pi,$$

che contraddice il fatto che α/π sia irrazionale

Scegliamo un numero naturale N tale che $2\pi/N$ sia inferiore alla lunghezza di I . Dividiamo la circonferenza in N archi di uguale lunghezza. Dato che i punti $R^h(x)$ sono infiniti, ne troviamo due, diciamo $R^k(x)$ e $R^h(x)$ con $k > h \geq 1$, che appartengono allo stesso arco di lunghezza $2\pi/N$ (in effetti, questo è vero con $0 \leq h < k \leq N$: i punti $R^h(x)$ con $0 \leq h \leq N$ sono $N+1$, gli archetti sono N , quindi in uno di essi cadono almeno due punti).

Allora R^{k-h} è una rotazione di un angolo positivo o negativo, che in valore assoluto non supera $2\pi/N$. Dato che $2\pi/N$ è minore della lunghezza di I , un'iterata opportuna di R^{k-h} , diciamo $R^{m(k-h)}$ manda x nell'arco I . Questo conclude la dimostrazione.

Si potrebbe anche dimostrare che i punti $R^h(x)$ sono equidistribuiti sulla circonferenza: fissato un arco I , indichiamo con $N(n)$ il numero di numeri naturali h tra 0 e $n-1$ tali che $R^h(x)$ appartiene ad I ; allora $N(n)/n$ converge al rapporto tra la lunghezza di I e la lunghezza della circonferenza, per $n \rightarrow \infty$. Questo risultato è noto come teorema di Weyl.

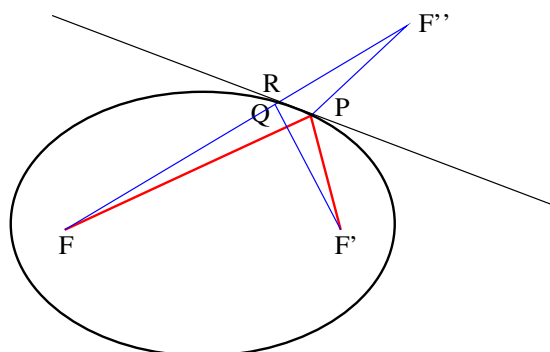
Proprietà dei biliardi ellittici. Si dimostri che in un biliardo ellittico una traiettoria che passa per un fuoco dopo il primo rimbalzo raggiunge l'altro fuoco.

Soluzione. Diamo due dimostrazioni diverse.

La prima sfrutta l'idea della riflessione. Siano F e F' i fuochi dell'ellisse e sia P un suo punto. Supponiamo per assurdo che gli angoli che i segmenti FP e $F'P$ individuano con la tangente all'ellisse in P non siano uguali. Ciò equivale a dire che se F'' è l'immagine del punto F' tramite la riflessione rispetto alla suddetta tangente, i punti F, P, F'' non risultano allineati. Quindi il segmento FF'' interseca l'ellisse in un punto Q diverso da P . Indichiamo con R il punto di intersezione tra il segmento FF'' e la tangente all'ellisse per P ed osserviamo che R si trova tra Q e F'' . La catena di disuguaglianze

$$\overline{FP} + \overline{PF'} = \overline{FP} + \overline{PF''} > \overline{FF''} = \overline{FQ} + \overline{QR} + \overline{RF''} = \overline{FQ} + \overline{QR} + \overline{RF'} > \overline{FQ} + \overline{QF'}$$

contraddice il fatto che sia P che Q stanno sullo stesso ellisse di fuochi F, F' .



Nella seconda dimostrazione usiamo la notazione vettoriale. Sia $u(t)$ una parametrizzazione dell'ellisse. Per la definizione dell'ellisse, la quantità

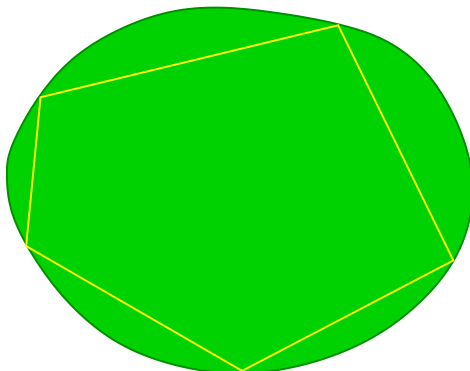
$$\|u(t) - F\| + \|u(t) - F'\|$$

è costante. Perciò la sua derivata rispetto a t è nulla:

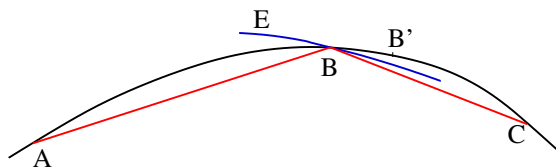
$$\dot{u}(t) \cdot \frac{u(t) - F}{\|u(t) - F\|} + \dot{u}(t) \cdot \frac{u(t) - F'}{\|u(t) - F'\|} = 0.$$

Il primo addendo vale $\|\dot{u}(t)\|$ moltiplicato per il coseno dell'angolo α tra $\dot{u}(t)$ e $u(t) - F$. Il secondo addendo vale $\|\dot{u}(t)\|$ moltiplicato per il coseno dell'angolo β tra $\dot{u}(t)$ e $u(t) - F'$. Quindi gli angoli α e β hanno coseno opposto, dunque sono supplementari. Dal fatto che $\dot{u}(t)$ ha per direzione la tangente all'ellisse in $u(t)$, segue facilmente che la traiettoria $Fu(t)F'$ obbedisce alla legge di riflessione.

Orbite periodiche nei biliardi convessi Si consideri un biliardo convesso Ω con bordo regolare. Si dimostri che se il perimetro del poligono P inscritto in Ω è un massimo locale, allora il bordo di P è un'orbita periodica.



Soluzione. Fissiamo tre vertici consecutivi A, B, C del poligono P e mostriamo che i lati AB e BC formano angoli uguali con la tangente al bordo di Ω per B . Per la proprietà dell'ellisse dimostrata nel problema precedente, è equivalente mostrare che l'ellisse E di fuochi A, C passante per B è tangente al bordo di Ω in B . Se per assurdo così non fosse, potremmo spostare B in un punto B' che si trova ancora sul bordo di Ω ma che è esterno all'ellisse E (si veda la figura sotto, dove l'ellisse è disegnato in blu).

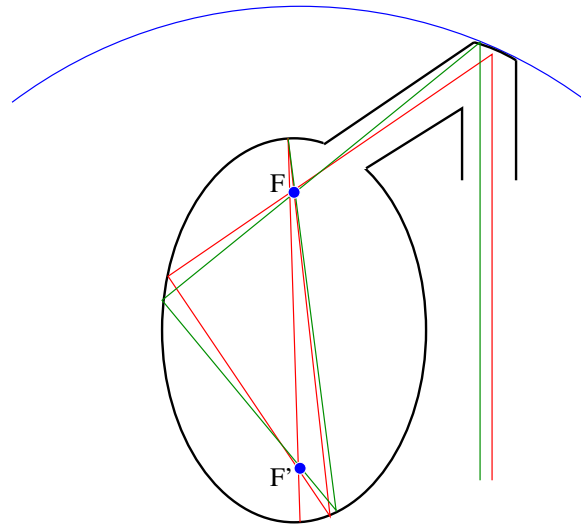


Ma allora $AB' + B'C > AB + BC$, dunque il poligono ottenuto da P rimpiazzando B con B' avrebbe perimetro maggiore, contro l'ipotesi che P massimizasse localmente il perimetro.

Si noti che questa dimostrazione mostra che l'ellisse E è tangente esternamente al bordo di Ω in B .

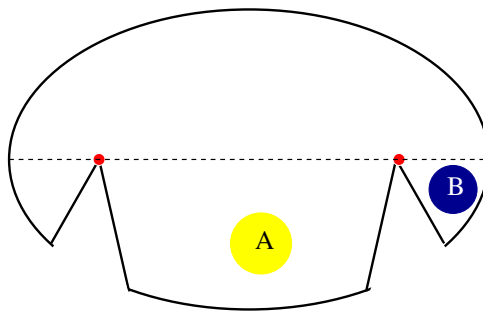
Intrappolare i raggi di luce. Sfruttando le proprietà dei biliardi ellittici e parabolici, costruire una figura geometrica in grado di intrappolare un piccolo fascio di raggi di luce paralleli.

Soluzione. Il modo più semplice (sicuramente ce ne sono molti altri) per realizzare la figura richiesta è quello di far rimbalzare il fascio di raggi paralleli su uno specchio parabolico messo in modo che la retta direttrice sia perpendicolare al fascio. Dopo la riflessione i raggi passano tutti per il fuoco F della parabola. Ora si considera un'ellisse che abbia uno dei due fuochi in F . Dal momento che tutti i raggi che passano per un fuoco dell'ellisse dopo ogni riflessione passano per l'altro fuoco e l'orbita tende a schiacciarsi sull'asse maggiore, è sufficiente applicare un piccolo foro all'ellisse per permettere ai raggi provenienti dalla riflessione con la parabola di entrarvi e rimanere intrappolati per sempre. Una figura che soddisfa i requisiti richiesti è disegnata in nero qua sotto. In blu appare la parabola e sono segnati in rosso e verde due raggi di luce del fascio.



Punti oscuri in una stanza con pareti a specchi. Sfruttando le proprietà dei biliardi ellittici, progettare una stanza che soddisfi la seguente condizione: nonostante le pareti siano tutte riflettenti, vi è una coppia di punti P e Q tale che la luce di una lampadina posta in P non raggiunge Q .

Soluzione Consideriamo la stanza disegnata qua sotto. La parte superiore è la metà di un'ellisse, per raggiungere la quale un raggio di luce che proviene dalla parte inferiore della figura deve necessariamente passare per la porzione dell'asse maggiore compresa tra i due fuochi. Sappiamo che nei biliardi ellittici un raggio di luce che attraversa questa porzione dell'asse maggiore dopo la riflessione la attraversa nuovamente. Quindi la luce di una lampadina posta nel punto A non raggiungerà mai il punto B .



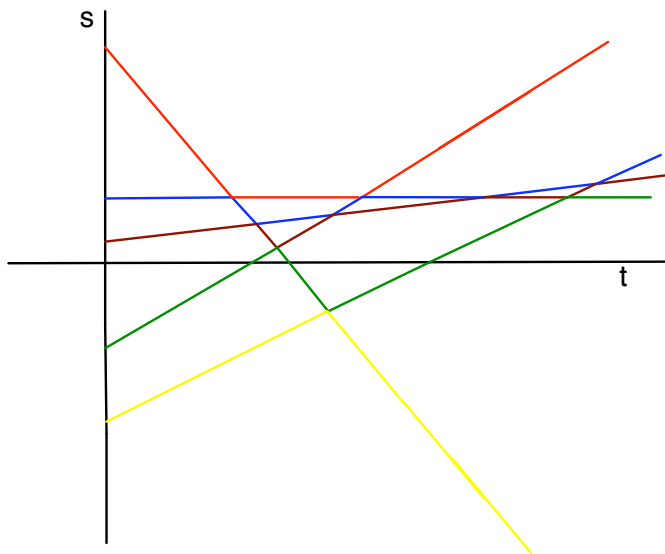
Quanti sono al più gli urti? Si considerino n palline puntiformi aventi la stessa massa, confinate a muoversi lungo una retta. Inizialmente partono con velocità arbitraria, rimbalzando tra loro in modo perfettamente elastico. Quanti urti vi saranno al massimo?

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che due palline di uguale massa che si urtano si scambiano le velocità. Infatti, se u_1 e u_2 sono le loro velocità prima dell'urto, v_1 e v_2 le velocità dopo l'urto e m è la loro massa, la conservazione della quantità di moto e la conservazione dell'energia forniscono le equazioni

$$\begin{aligned} mu_1 + mu_2 &= mv_1 + mv_2, \\ \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2 &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Risolviendo questo sistema in v_1 e v_2 , troviamo le due soluzioni $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2$, e $v_1 = u_2$, $v_2 = u_1$. La prima delle due soluzioni è da scartare, poichè implicherebbe che le due palline si attraversano, la seconda ci dice che le due palline si scambiano le velocità, come affermato.

Se immaginiamo che ad ogni urto le due palline coinvolte si scambino identità, ogni pallina procede in linea retta senza mai modificare la sua velocità. Su un piano cartesiano che in ascissa riporta il tempo e in ordinata lo spazio percorso riportiamo i grafici delle funzioni che descrivono il moto delle singole palline. Per quanto detto sopra, si tratta di disegnare n rette, come nella seguente figura, dove indichiamo con colori diversi il moto di ciascuna pallina.



Quindi il numero massimo degli urti coincide con il numero massimo delle intersezioni di n rette nel piano. Questo numero massimo è raggiunto quando non vi sono coppie di rette parallele.

Indichiamo con $k(n)$ il numero di intersezioni di n rette due a due non parallele. Allora $k(1) = 0$, $k(2) = 1$ e possiamo calcolare $k(n)$ induttivamente: tracciando l' n -esima retta

aggiungiamo esattamente $n - 1$ punti di intersezione, tanti quanti le rette già presenti, quindi

$$k(n) = k(n - 1) + n - 1$$

per ogni $n \geq 2$. Pertanto $k(n)$ è la somma di tutti gli interi da 1 a $n - 1$.

Questa somma può essere calcolata nel seguente modo: il doppio di $k(n)$ coincide con

$$(1 + 2 + \cdots + (n - 2) + (n - 1)) + ((n - 1) + (n - 2) + \cdots + 2 + 1).$$

Se sommiamo due a due i numeri che compaiono nelle due parentesi, seguendo l'ordine indicato, otteniamo $n - 1$ volte n . Quindi $2k(n) = n(n - 1)$, da cui

$$k(n) = \frac{n(n - 1)}{2}.$$

Questo è il numero massimo degli urti, che è realizzato quando le velocità sono due a due distinte.

Calcolare Pi greco. Si considerino due palline vincolate a muoversi su una semiretta, all'estremità della quale si trova un muro. Le palline, che immaginiamo puntiformi, rimbalzano tra loro e contro il muro in modo perfettamente elastico. Supponiamo che la palla più lontana dal muro si muova inizialmente in direzione di esso ed abbia massa 100^n volte maggiore dell'altra, che invece è inizialmente ferma.

Dimostrare che il numero totale degli urti tra le due palline e tra la pallina leggera ed il muro è differisce al più per un'unità dal numero composto dalle prime $n + 1$ cifre decimali di π .

Soluzione. Indichiamo con x_1 e x_2 le distanze dal muro della palla pesante e leggera, rispettivamente. Vale allora $0 \leq x_2 \leq x_1$, ossia il punto (x_1, x_2) si muove nel settore compreso tra la bisettrice del primo quadrante e la semiretta positiva delle ascisse del piano cartesiano x_1, x_2 .

Consideriamo un urto tra le due palle. Siano u_1 e u_2 le due velocità prima dell'urto e siano v_1 e v_2 le due velocità dopo l'urto. Le leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto danno:

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2, \quad (2)$$

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2. \quad (3)$$

La prima delle due identità suggerisce di riscalarare le variabili spaziali come segue:

$$\bar{x}_1 = \sqrt{m_1}x_1, \quad \bar{x}_2 = \sqrt{m_2}x_2.$$

Il punto (\bar{x}_1, \bar{x}_2) appartiene adesso al settore di angolo

$$\theta = \arctan \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \arctan(10^{-n})$$

nel piano cartesiano con coordinate \bar{x}_1, \bar{x}_2 . Un riscalamento delle variabili spaziali provoca un riscalamento dello stesso tipo per le velocità, che quindi assumono la forma

$$\bar{u}_j = \sqrt{m_j}u_j, \quad \bar{v}_j = \sqrt{m_j}v_j, \quad j = 1, 2.$$

Allora (2) e (3) si riscrivono come

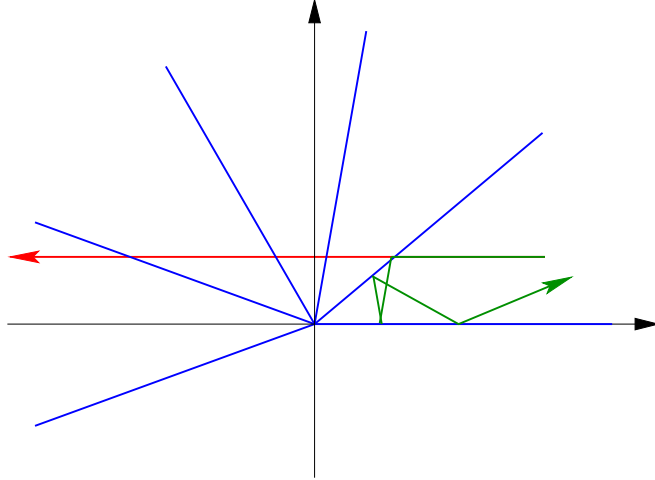
$$\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 = \bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2, \quad (4)$$

$$\sqrt{m_1}\bar{u}_1 + \sqrt{m_2}\bar{u}_2 = \sqrt{m_1}\bar{v}_1 + \sqrt{m_2}\bar{v}_2. \quad (5)$$

La (4) ci dice che i vettori $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ e $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ hanno la stessa norma. La (5) ci dice che l'angolo tra \bar{u} e $(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2})$ è uguale all'angolo tra \bar{v} e $(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2})$, vettore che punta nella direzione della semiretta che delimita il settore angolare. Questo dimostra che al momento di un urto tra le due palle, quando (\bar{x}_1, \bar{x}_2) appartiene alla semiretta che delimita il settore angolare, il moto di (\bar{x}_1, \bar{x}_2) segue la legge di riflessione dei biliardi. Un ragionamento

analogo vale per gli urti tra una delle palle e il muro. Concludiamo che il nostro sistema è equivalente ad un punto che si muove in un biliardo a forma di settore di angolo θ .

Riflettendo questo settore ripetutamente rispetto ad una delle rette che lo delimita, otteniamo la figura seguente (dove abbiamo considerato un rapporto tra le masse m_2/m_1 molto maggiore, ma ancora inferiore ad 1). All'inizio la palla che abbiamo indicato con il numero 2 è ferma, quindi l'ordinata della velocità iniziale è nulla. L'orbita effettiva del punto che è associato alla nostra condizione iniziale è segnata in verde, la sua immagine tramite le varie riflessioni è, più semplicemente, la retta segnata in rosso.



Questa retta interseca le semirette blu esattamente

$$\left[\frac{\pi}{\theta} \right] - 1 = \left[\frac{\pi}{\arctan x} \right] - 1$$

volte, dove $x = 10^{-n}$ e $[a]$ indica il più piccolo intero maggiore o uguale ad a . Vorremo sostituire ad $\arctan x$ il numero x nell'identità sopra. Per questo, ci serviremo della disuguaglianza

$$0 < \frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} < x, \quad \forall x > 0, \quad (6)$$

che dimostreremo alla fine. L'intero

$$N := \left[\frac{\pi}{x} \right] - 1 = \lceil 10^n \pi \rceil - 1 = \lfloor 10^n \pi \rfloor$$

è composto dalle prime $n + 1$ cifre decimali di π . Per le disuguaglianze (6),

$$0 < \frac{\pi}{\arctan x} - \frac{\pi}{x} < \pi x = \pi 10^{-n}. \quad (7)$$

Dato che $\pi 10^{-n} < 1$, risulta

$$0 \leq \left[\frac{\pi}{\arctan x} \right] - \left[\frac{\pi}{x} \right] \leq 1,$$

da cui deduciamo che il numero di urti è N oppure $N+1$, come volevasi dimostrare. In effetti, la (7) implica facilmente che se il numero degli urti è $N+1$, allora le $n-1$ cifre che seguono l' n -esima cifra decimale di π sono tutte dei 9, fatto che sembra piuttosto implausibile.

Ci resta da dimostrare (6). Sia $x > 0$. Dato che $0 < \arctan x < x$, si ha

$$\frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} > 0.$$

L'altra disuguaglianza

$$\frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} < x$$

è equivalente al fatto che la funzione

$$f(x) := x - \arctan x - x^2 \arctan x$$

sia negativa per $x > 0$. Ma questo segue dal fatto che $f(0) = 0$ e

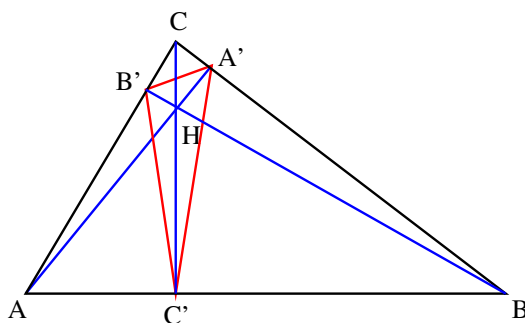
$$f'(x) = -2x \arctan x < 0$$

per $x > 0$.

Orbite periodiche nei triangoli acutangoli. Si consideri un biliardo triangolare con tutti gli angoli acuti. Se ne traccino le 3 altezze e si indichino con A', B', C' i rispettivi piedi.

1. Dimostrare che il triangolo $A'B'C'$ è un'orbita del biliardo e che questa è l'unica orbita di periodo 3.
2. Dimostrare che nei triangoli ottusangoli o rettangoli non vi sono orbite di periodo 3.

Soluzione del punto 1. Dimostriamo innanzitutto che $A'B'C'$ è un'orbita di periodo 3. Sappiamo che le tre altezze si incontrano in uno stesso punto H , detto ortocentro.



È sufficiente trattare uno solo dei tre rimbalzi, ad esempio quello in C' , e dimostrare che $\widehat{B'C'H} = \widehat{A'C'H}$.

Osserviamo che i triangoli AHB' e BHA' sono simili perché sono rettangoli e hanno gli angoli in H uguali in quanto opposti al vertice. Da ciò ricaviamo che $\widehat{B'AH} = \widehat{HBA'}$.

Inoltre il quadrilatero $AC'HB'$ è inscritto in una circonferenza perché ha gli angoli $\widehat{AB'H}$ e $\widehat{AC'H}$ retti e quindi supplementari. Dunque gli angoli $\widehat{B'AH}$ e $\widehat{B'C'H}$ sono uguali perché insistono sullo stesso arco di circonferenza. Analogamente si trova $\widehat{A'C'H} = \widehat{HBA'}$. Quindi

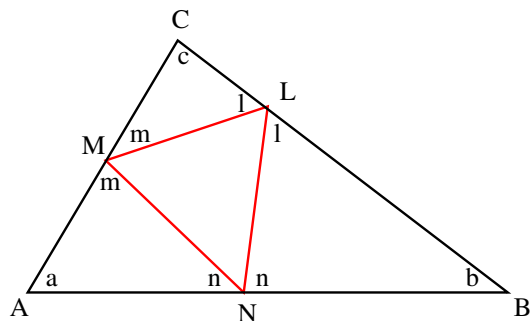
$$\widehat{B'C'H} = \widehat{B'AH} = \widehat{HBA'} = \widehat{A'C'H},$$

come volevasi dimostrare.

Per concludere la dimostrazione del punto 1 e per dimostrare il punto 2 avremo bisogno del seguente:

Lemma. Supponiamo che il triangolo ABC possieda l'orbita di periodo 3 LMN . Allora i tre triangoli ottenuti rimuovendo il triangolo LMN dal triangolo ABC sono simili al triangolo ABC .

Dimostrazione. Indichiamo con a, b, c gli angoli interni del triangolo ABC e con l, m, n gli angoli che l'orbita del biliardo LMN individua con i lati del triangolo ABC , come nella figura nella pagina che segue.



Sappiamo che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, ossia π radianti. Sommando gli angoli interni dei triangoli ANM e NBL troviamo

$$2\pi = a + n + m + n + b + l = (a + b) + (m + l) + 2n.$$

Considerando i triangoli ABC e MLC otteniamo le ulteriori relazioni

$$a + b = \pi - c, \quad m + l = \pi - c.$$

Sostituendo sopra si ottiene

$$2\pi = \pi - c + \pi - c + 2n,$$

da cui si ricava $n = c$. Allo stesso modo si ha $l = a$ e $m = b$. Dunque i triangoli ANM , NBL e MLC sono simili al triangolo di partenza ABC . Questo conclude la dimostrazione del lemma. \square

Possiamo adesso concludere la soluzione del punto 1, dimostrando che $A'B'C'$ è l'unica orbita di periodo 3 nel triangolo acutangolo ABC . Se ve ne fosse un'altra LMN , uno dei triangolini esterni, ad esempio ANM , dovrebbe essere più grande del corrispettivo triangolino $AC'B'$. Ma allora gli altri due triangolini NBL e MLC dovrebbero essere più piccoli dei loro corrispettivi $C'BA'$ e $B'A'C'$. Questo è impossibile perché il lato BC non può rimpicciolire!

Soluzione del punto 2. Se il triangolo ABC possiede un'orbita di periodo 3 LMN come nella seconda figura, allora ognuno dei tre angoli a, b, c deve essere acuto: infatti dato che $2n < \pi$ e, come abbiamo dimostrato nel lemma, $c = n$, deduciamo che $c < \pi/2$. Lo stesso vale per gli altri angoli.

Orbite periodiche nei triangoli rettangoli. Si consideri un biliardo a forma di triangolo rettangolo. Dimostrare che un'orbita che parte da un punto dell'ipotenusa sufficientemente vicino al piede dell'altezza relativa all'angolo retto (ma non coincidente con tale punto) in direzione ortogonale all'ipotenusa risulta periodica di periodo 6.

Soluzione. Sia H il punto sull'ipotenusa AB da cui parte la pallina in direzione perpendicolare alla sponda. Supponiamo ad esempio che H si trovi dal lato di A rispetto al piede dell'altezza per C . Quindi la palla tocca per primo il lato AC in un punto che chiamiamo K . Avendo due angoli uguali, i triangoli AKH e ABC sono simili. Dopo il rimbalzo in K , la palla prosegue lungo una retta che taglia la retta BC in un punto che chiamiamo L , che se H è sufficientemente vicino al piede dell'altezza per C cade all'interno del lato BC . Il triangolo KLC è rettangolo e dato che $\widehat{CKL} = \widehat{AKH}$, esso risulta simile ai due triangoli considerati in precedenza. Dopo il rimbalzo in L , la palla colpisce l'ipotenusa in un punto M . Dato che $\widehat{MLB} = \widehat{KLC}$ e $\widehat{MBL} = \widehat{CKL}$ (quest'ultima uguaglianza segue dalla similitudine di ABC e KLC), anche il triangolo BLM è simile ai precedenti. In particolare, è rettangolo in M , dunque dopo il rimbalzo in M la palla torna indietro lungo la traiettoria già percorsa formando un'orbita di periodo 6.

