8.11.2011

La funzione esponenziale

- Abbiamo un capitale c e la Banca B1 ci offre di custodirlo per un anno, restituendocelo dopo un anno maggiorato di una sua frazione x, ossia ci restituisce $c + xc = c(1+x)$
  (nel gergo comune, la banca ci sta offrendo un interesse del $100x$ %)

- La banca B12 ci offre lo stesso tasso di interesse annuale, che però verrà accreditato ogni mese: la frazione è $\frac{x}{12}$, ma viene applicata ogni mese.
  Quindi:
  dopo 1 mese $c + \frac{x}{12}c = c\left(1+\frac{x}{12}\right)$
  dopo 2 mesi $c\left(1+\frac{x}{12}\right) + \frac{x}{12}c\left(1+\frac{x}{12}\right) = c\left(1+\frac{x}{12}\right)^2$

  dopo 12 mesi $c\left(1+\frac{x}{12}\right)^{12}$

- La banca B365 offre lo stesso tasso annuale, ma lo accredita ogni giorno

  dopo 1 giorno $c\left(1+\frac{x}{365}\right)$
  dopo 30 giorni $c\left(1+\frac{x}{365}\right)^{30}$

  dopo 365 giorni $c\left(1+\frac{x}{365}\right)^{365}$

Il fattore per cui viene moltiplicato c dopo un anno è $1+x$ per la Banca B1, $\left(1+\frac{x}{12}\right)^{12}$ per la Banca B12, $\left(1+\frac{x}{365}\right)^{365}$ per la Banca B365

L'offerta dell'ultima banca sembra la più vantaggiosa per noi. In generale, la Banca B_n suddivide l'anno in n periodi di ugual durata, al termine di ciascuno dei quali moltiplica il nostro deposito per $1+\frac{x}{n}$.
Dopo un anno, la Banca B_n restituisce c moltiplicato per il fattore

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

La Banca B_∞ porta al limite questo procedimento e dopo un anno restituisce c moltiplicato per il fattore

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

<u>Defn</u> La funzione esponenziale è definita come

$$\exp(x) := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Il numero che otteniamo per $x=1$ si chiama numero di Nepero e si indica con la lettera e:

$$e := \exp(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Risulta $2<e<3$.
Quindi il numero di Nepero è il fattore di moltiplicazione dato dalla Banca B_∞, quella che applica l'interesse ad ogni istante, qualora decida di offrire un interesse annuo di $x=1$, ossia del 100%.
La definizione sopra è giustificata dalla seguente:

<u>Prop</u> Sia $x\in\mathbb{R}$. La successione $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ è ≥ 0 e crescente per $n\geq -x$. Inoltre è limitata superiormente.
In particolare, converge.

dim Sia $n \geq -x$. Allora $1+\frac{x}{n} \geq 1 + \frac{x}{-x} = 0$.
Inoltre, la media geometrica degli $n+1$ numeri non negativi

$$\underbrace{1+\frac{x}{n},\ 1+\frac{x}{n},\ \ldots,\ 1+\frac{x}{n}}_{n \text{ volte}},\ 1$$

è $G = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$, mentre la loro media aritmetica è

$$A = \frac{1}{n+1}\left(n\left(1+\frac{x}{n}\right)+1\right) = \frac{1}{n+1}\left(n+x+1\right) = 1 + \frac{x}{n+1}$$

Da $G \leq A$ ricaviamo che $G^{n+1} \leq A^{n+1}$, ossia
$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$, che ci dice che la successione è crescente.
Verifichiamo che è limitata superiormente:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \frac{x^k}{n^k}$$

Dato che $\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \leq 1$, si ha

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|x|^k}{k!}$$

Ricordiamo che $\frac{a^k}{k!} \to 0$ $\forall a$. Dunque $\frac{|x|^k}{k!} = \frac{1}{2^k}\frac{|2x|^k}{k!} \leq \frac{1}{2^k}$ definitivamente, ossia $\forall k \geq n_0$. Allora:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{|x|^k}{k!}}_{= C} + \sum_{k=n_0}^{n} \frac{1}{2^k} = C + \frac{1}{2^{n_0}} \sum_{k=0}^{n-n_0} \frac{1}{2^k} =$$

$$= C + \frac{1}{2^{n_0}} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0+1}}{1-\frac{1}{2}} \leq C + \frac{1}{2^{n_0-1}}$$

Dato che questa quantità è indipendente da n, $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ è limitata superiormente. $\square$

Proprietà della Funzione esponenziale

1. $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Segue dal fatto che $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ è definitivamente crescente e positiva.

2. $\exp(0) = 1$

Infatti: $\left(1+\frac{0}{n}\right)^n = 1^n = 1 \quad \forall n$

3. Se $x < y$, $(y-x)\exp(x) \leq \exp(y) - \exp(x) \leq (y-x)\exp(y)$

dim

$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ Quindi se $x<y$

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \frac{y-x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{y}{n}\right)^k\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1-k}$$

$$= (y-x)\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(1+\frac{y}{n}\right)^k\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1-k}}$$

media aritmetica di n numeri compresi tra $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}$ e $\left(1+\frac{y}{n}\right)^{n-1}$

$$\Rightarrow (y-x)\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \leq \left(1+\frac{y}{n}\right)^n - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq (y-x)\left(1+\frac{y}{n}\right)^{n-1}$$

$$\| $$

$$(y-x)\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \frac{n}{n+x} \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\downarrow$$

$$(y-x)\exp(x) \leq \exp(y) - \exp(x) \leq (y-x)\exp(y)$$

4. $\exp(x)$ è strettamente crescente

Segue immediatamente da (3) e (1)

5. $\exp(x)$ è continua

Segue da (3)

6. Se $x_n \to x$ allora $\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n \longrightarrow \exp(x)$

Fissiamo $0 < \varepsilon < 1$. Definitivamente

$$x-\varepsilon \leq x_n \leq x+\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\left(1+\frac{x-\varepsilon}{n}\right)^n}_{\downarrow \; \exp(x-\varepsilon)} \leq \left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n \leq \underbrace{\left(1+\frac{x+\varepsilon}{n}\right)^n}_{\downarrow \; \exp(x+\varepsilon)}$$

e la tesi segue da (5)

7. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$

Infatti $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x+y+xy/n}{n}\right)^n$ per (6)

$$\exp(x)\cdot\exp(y) = \exp(x+y)$$

Conseguenze • $\exp(-x)\cdot\exp(x) \overset{(7)}{=} \exp(-x+x) = \exp(0) = 1$

$$\Longrightarrow \text{(A)} \quad \boxed{\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}}$$

• Se $n \in \mathbb{N}$ $\quad \exp(n) = \exp(\overbrace{1+1+\ldots+1}^{n \text{ volte}}) = \overbrace{\exp(1)\ldots\exp(1)}^{n \text{ volte}}$

$$= \underbrace{e \ldots e}_{n \text{ volte}} = e^n$$

$$\text{(B)} \quad \boxed{\exp(n) = e^n \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

(A) + (B) $\Rightarrow$ (C) $\boxed{\exp(m) = e^m \quad \forall m \in \mathbb{Z}}$

Inoltre se $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ $\quad \exp(1) = \exp(\overbrace{\tfrac{1}{m} + \dots + \tfrac{1}{m}}^{m \text{ volte}})$

$\overset{(7)}{=} \underbrace{\exp(\tfrac{1}{m}) \cdot \exp(\tfrac{1}{m}) \dots \exp(\tfrac{1}{m})}_{m} = \exp(\tfrac{1}{m})^m$

ossia (D) $\boxed{\exp(\tfrac{1}{m}) = \sqrt[m]{e}}$

Da (C) e (D) segue che

$$\boxed{\exp(\tfrac{p}{q}) = \sqrt[q]{e^p}} \qquad \forall p \in \mathbb{Z},\ \forall q \in \mathbb{N}, \ q \geq 1$$

Ricordando la convenzione $\sqrt[q]{e^p} =: e^{p/q}$,
deduciamo che $\exp(\tfrac{p}{q}) = e^{p/q} \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}_0$

Quindi: $\exp(x)$ è l'unica funzione continua tale che $\exp(p/q) = e^{p/q} \quad \forall p/q \in \mathbb{Q}$
Ciò autorizza la notazione
$$e^x := \exp(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

8. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Segue da (3)

9. $e^x \geq 1 + x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Segue da (3) (o anche dalla crescenza di $(1+\frac{x}{m})^m$)

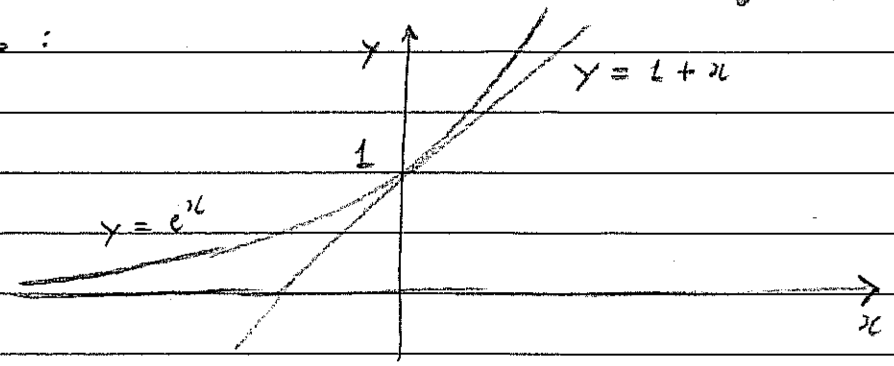
10. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Segue da (9)

11. $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Infatti per $x \to -\infty$ $e^x = e^{-(-x)} = \frac{1}{\underbrace{e^{-x}}_{+\infty}} \to 0$

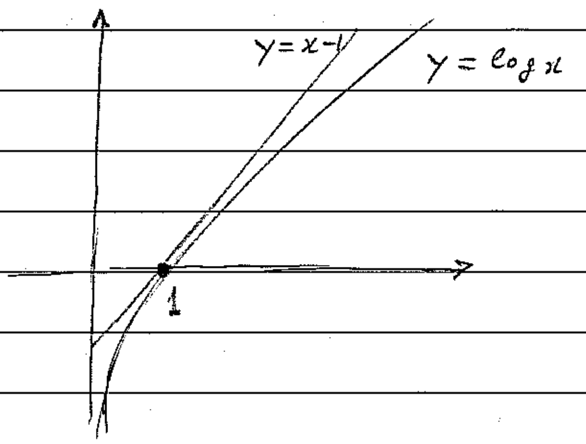
Concludiamo che e^x ha un grafico di questo tipo:



La funzione e^x è bigettiva da $\mathbb{R}$ su $]0, +\infty[$

La sua inversa si dice logaritmo (naturale) di x

$$\log :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$



Dalle proprietà dell'esponenziale seguono le seguenti proprietà del logaritmo:

Proprietà del logaritmo

- $\log :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è continua, strettamente crescente e surgettiva ($\Rightarrow$ bigettiva)
- $\log(xy) = \log x + \log y$
- $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$
- $\log 1 = 0$
- $\log x \leq x - 1 \quad \forall x > 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$