25.10.2011

Monotonia e continuità

Teo Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione crescente e sia $x_0 \in]a,b[$. Allora esistono finiti i limiti sinistro e destro di f per $x \to x_0$ e vale

$$f(a) \leq \lim_{x \to x_0-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0+} f(x) \leq f(b)$$

dim

Per la crescenza di f si ha:

$$f(x_0) = \sup\{f(x) \mid a \leq x \leq x_0\} \quad \text{(in effetti è un max)}$$

e

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \sup\{f(x) \mid a \leq x < x_0\}$$

Infatti, detto L l'ultimo sup, si ha che $f(x) \leq L$ per ogni $x < x_0$ e $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, x' < x_0$ tale che $f(x') > L - \varepsilon$. Ma allora $\forall x \in [x', x_0[$ risulta

$$L \geq f(x) \geq f(x') > L - \varepsilon$$

da cui $\lim_{x \to x_0-} f(x) = L$.

La disuguaglianza $\lim_{x \to x_0-} f(x) \leq f(x_0)$ segue allora

dal fatto che $\{f(x) \mid a \leq x < x_0\} \subset \{f(x) \mid a \leq x \leq x_0\}$, mentre quella $f(a) \leq \lim_{x \to x_0-} f(x)$ dal fatto che $f(a) \in \{f(x) \mid a \leq x < x_0\}$.
Per le altre disuguaglianze si procede in modo analogo, osservando che

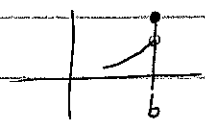
$$f(x_0) = \inf\{f(x) \mid x_0 \leq x \leq b\}$$

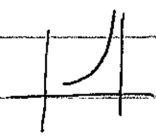
$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \inf\{f(x) \mid x_0 < x \leq b\}$$

$\square$

Esempio La funzione $f(x) = \operatorname{sgn} x$ è crescente e si ha
$$-1 = \lim_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x < \operatorname{sgn} 0 = 0 < \lim_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$$

Oss Agli estremi dell'intervallo si hanno casi diversi a seconda del fatto che l'estremo appartenga o meno al dominio della funzione monotona. Ad esempio:

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente implica
$$\lim_{x \to b-} f(x) \leq f(b)$$


- $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ crescente implica
$$\exists \lim_{x \to b-} f(x) \in]-\infty, +\infty]$$


Teorema Sia $f : [a,b] \to [c,d]$. Allora sono fatti equivalenti:
1) f continua e bigettiva.
2) f strettamente monotona e surgettiva.

dim
1) $\Rightarrow$ 2) Basta mostrare che f è strettamente monotona. Se non lo fosse, potrei trovare $x < y < z$ in $[a,b]$ tali che $f(x)$, $f(y)$ e $f(z)$ non sono ordinati né in modo strettamente crescente né strett. decrescente. Per la bigettività di f, questi 3 valori sono distinti, quindi si deve avere
$$f(x) < f(y) \quad e \quad f(y) > f(z)$$
oppure
$$f(x) > f(y) \quad e \quad f(y) < f(z)$$
Guardiamo il primo caso (l'altro è analogo, oppure

si riduce al primo considerando $-f$). Sia
$L \in]f(x), f(y)[\cap]f(z), f(y)[$. Per il teorema
dei valori intermedi esistono $s \in]x,y[$ e $t \in]y,z[$
tali che $f(s) = L$ e $f(t) = L$. Ma questo
viola l'iniettività di f. ↯

2) $\Rightarrow$ 1) La stretta monotonia implica l'iniettività,
dunque basta mostrare che f è continua.
Sia $x_0 \in]a,b[$. Allora

$$f(a) \le L := \lim_{x \to x_0-} f(x) \underset{(1)}{\le} f(x_0) \underset{(2)}{\le} \lim_{x \to x_0+} f(x) =: R \le f(b)$$

Se una delle due disuguaglianze fosse stretta, diciamo
la (1), l'intervallo $]L, f(x_0)[$ non apparterrebbe
all'immagine di f. Dato che questo intervallo è
contenuto in $[f(a), f(b)]$, $f([a,b])$ non sarebbe
un intervallo e quindi non coinciderebbe con $[c,d]$ ↯
Si ragiona in modo simile se $x_0 = a$ oppure b □

<u>Corollario</u> (Continuità della funzione inversa)
Sia $f : [a,b] \to [c,d]$ continua e bigettiva.
Allora $f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ è continua.

<u>dim</u>
Per l'implicazione 1) $\Rightarrow$ 2) del teorema precedente,
f è strettamente monotona. Allora anche f^{-1} lo
è. Dato che f^{-1} è anche bigettiva, per l'implicazione 2) $\Rightarrow$ 1) del teorema precedente f^{-1} è continua.

La funzione radice n-esima

La funzione $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, è strettamente crescente e continua da $[0, +\infty[$ in $[0, +\infty[$. Dato che $f(0) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il teorema dei valori intermedi ci assicura che

$$f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[,$$

è anche surgettiva. Allora la sua funzione inversa è continua, strett. crescente e surgettiva da $[0, +\infty[$ in $[0, +\infty[$

Poniamo

$$\sqrt[n]{x} := f^{-1}(x)$$

Dunque se $x \geq 0$, $\sqrt[n]{x}$ è l'unico $t \geq 0$ tale che $t^n = x$.