1.12.2011

## Calcolo di derivate

- $D x^n = n x^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dimostriamolo per induzione. Per $n = 0$, si ha $x^0 = 1$, che ha derivata identicamente nulla, in accordo con la formula. Se vale la formula per $n-1$, ossia se $D x^{n-1} = (n-1) x^{n-2}$, si ha, usando la regola per la derivazione di un prodotto $[\, D(fg) = (Df)g + f(Dg) \,]$

$$D x^n = D(x^{n-1} \cdot x) = (D x^{n-1}) \cdot x + x^{n-1} \cdot D x =$$
$$= (n-1) x^{n-2} \cdot x + x^{n-1} \cdot 1 = n x^{n-1} \qquad \text{cvd.}$$

- $D \dfrac{1}{x^n} = -n \dfrac{1}{x^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\ x \neq 0$

Usiamo la regola di derivazione del reciproco di una funzione $\left[\, D \dfrac{1}{f} = -\dfrac{f'}{f^2} \,\right]$.

$$D \frac{1}{x^n} = -\frac{D x^n}{x^{2n}} = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \frac{1}{x^{n+1}} \qquad \text{cvd}$$

Oss Ponendo $m = -n$, la formula appena dimostrata si riscrive come:

$$D x^m = m x^{m-1} \qquad \forall m \leq -1$$

che ha la stessa forma della formula per $D x^n$ con $n \geq 0$. Concludiamo che

$$\boxed{D x^n = n x^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}}$$

dove nel caso $n < 0$ occorre assumere $x \neq 0$.

Es Calcolare la derivata di $f(x) = \dfrac{x^7 + 3x^2 - 5}{x^3 - 1}$

Utilizziamo la regola della derivazione di un quoziente $\left[ D\dfrac{f}{g} = \dfrac{f'g - fg'}{g^2} \right]$

$$f'(x) = \frac{(7x^6 + 6x)(x^3-1) - 3x^2(x^7 + 3x^2 - 5)}{(x^3-1)^2} = \dots$$

e si procede con le opportune semplificazioni

- Derivata dell'esponenziale: fissiamo $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$e^{x+h} = e^x \cdot e^h = e^x(1 + h + o(h)) \quad \text{per } h \to 0$$
$$= e^x + e^x h + o(h)$$

Ciò implica che $\boxed{D e^x = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

Derivata di una composizione Ricordiamo che il simbolo $g \circ f$ indica la funzione che manda $x$ in $g(f(x))$, ossia

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$
$$x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x))$$
$$y \longmapsto g(y)$$

Supponiamo che $f$ sia derivabile in $x$ e che $g$ sia derivabile in $y := f(x)$, ossia

1) $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$ per $h \to 0$

2) $g(y+k) = g(y) + g'(y)k + o(k)$ per $k \to 0$

Allora:

$$(g \circ f)(x+h) = g(f(x+h)) \stackrel{(1)}{=} g(\underbrace{f(x) + f'(x)h + o(h)}_{y})$$

Dato che $y := f'(x)h + o(h)$ è un infinitesimo, possiamo usare (2) e continuare con le uguaglianze:

$$= g(f(x)) + g'(f(x))(f'(x)h + o(h)) + o(f'(x)h + o(h))$$

Ma $o(f'(x)h + o(h)) = o(h)$, da cui

$$(g \circ f)(x+h) = (g \circ f)(x) + g'(f(x))f'(x)h + o(h)$$

che implica: $\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)}$

__Es__ Calcolare la derivata di $e^{x^3+2x^2-x}$

Si tratta di una composizione $x \mapsto g(f(x))$, dove $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$ e $g(y) = e^y$

Allora

$$D(e^{x^3+2x^2-x}) = \underbrace{e^{x^3+2x^2-x}}_{g'(f(x))} \cdot \underbrace{(3x^2 + 4x - 1)}_{f'(x)}$$

- Sia $n \in \mathbb{Z}$ e sia $f$ una funzione derivabile in $x$; nel caso $n < 0$ supponiamo anche $f(x) \neq 0$. Allora

$$\boxed{D(f(x)^n) = n(f(x))^{n-1} f'(x)}$$

Infatti, la funzione $(f(x))^n$ può essere pensata come composizione $g \circ f$, dove $g(y) = y^n$. Dato che $g'(y) = n y^{n-1}$, dalla formula di derivazione di una composizione ricaviamo

$$D(f(x)^n) = D(g \circ f)(x) = g'(f(x))\, f'(x) = n\, f(x)^{n-1} f'(x).$$

Derivate delle funzioni trigonometriche

Oss Se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo e $f : I \to \mathbb{C}$, la derivata di $f$ è la funzione a valori complessi

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = (\mathrm{Re} f)'(x) + i\, (\mathrm{Im} f)'(x)$$

Derivando la formula di de Moivre,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

otteniamo

$$i\, e^{ix} = D(\cos x) + i\, D \sin x$$

Dato che $i\, e^{ix} = i(\cos x + i \sin x) = -\sin x + i \cos x$, si ha

$$-\sin x + i \cos x = D(\cos x) + i\, D(\sin x)$$

da cui, uguagliando le parti reali e le parti immaginarie

$$\boxed{D \cos x = -\sin x} \qquad \boxed{D \sin x = \cos x}$$

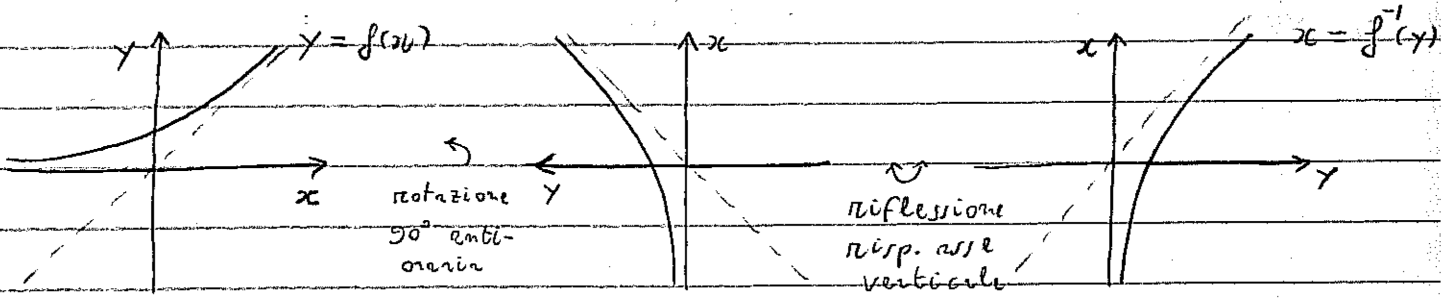
• $D\,tg\,x = D\,\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(D\sin x)\cos x - \sin x\,(D\cos x)}{\cos^2 x}$

$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$ espressione che può essere scritta nei due modi:

$$\boxed{D\,tg\,x = 1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

## Derivata della funzione inversa

Come si traccia il grafico della funzione inversa?




La composizione di queste due trasformazioni coincide con la riflessione rispetto alla retta $y = x$.

Se la retta tangente al grafico in $(x, f(x))$ ha coefficiente angolare $m = f'(x)$, dopo la prima rotazione il coefficiente angolare diventa $-\frac{1}{m} = -\frac{1}{f'(x)}$ e, dopo la successiva riflessione rispetto all'asse verticale, si ottiene $\frac{1}{m} = \frac{1}{f'(x)}$

Questi discorsi euristici suggeriscono che la derivata di $f^{-1}$ in $y = f(x)$ dovrebbe valere $\frac{1}{f'(x)}$, a patto che $f'(x) \neq 0$.

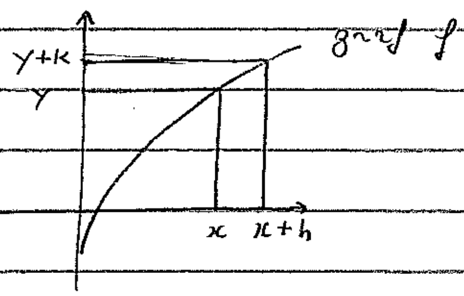
Formalizziamo l'euristica:

**Prop** Siano $I, J$ intervalli e $f: I \to J$ una funzione bigettiva e continua. Se $f$ è derivabile in $x \in I$ e $f'(x) \neq 0$, allora $f^{-1}$ è derivabile in $y := f(x)$ e

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

*dim*

Ricordiamo che $f$ continua e bigettiva tra intervalli implica $f$ strettamente monotona. Facciamo riferimento alla seguente figura:




Dobbiamo mostrare che

$$\lim_{k \to 0} \frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{x+h-x}{y+k-y} = \frac{h}{f(x+h) - f(x)}$$

dove $h$ è l'unico numero tale che $f(x+h) = y+k$, ossia $h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)$. Per la continuità della funzione inversa, $h \to 0$ per $k \to 0$. Dunque,

$$\frac{h}{f(x+h) - f(x)} \longrightarrow \frac{1}{f'(x)}$$

dove si è usato $f'(x) \neq 0$ $\square$

- Derivata del logaritmo: $y = e^x \iff x = \log y$
Dunque
$$D \log y = \frac{1}{De^x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$
Perciò $\boxed{D \log x = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0}$

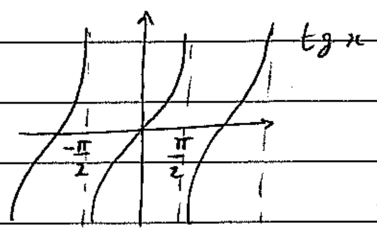
- $$D x^\alpha = D e^{\alpha \log x} = D(\alpha \log x)\, e^{\alpha \log x} = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \log x}$$
$$= \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \forall x > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

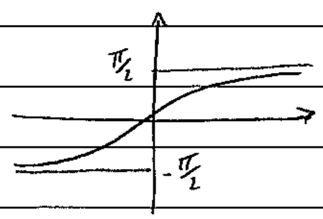
Quindi $\boxed{D x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall x > 0, \ \alpha \in \mathbb{R}}$ ossia vale la stessa formula trovata per $\alpha \in \mathbb{Z}$.

- $$D a^x = D e^{x \log a} = \log a \, e^{x \log a} = \log a \, a^x$$

Funzioni trigonometriche inverse

- La funzione $\operatorname{tg} x$ non è iniettiva, però ristretta all'intervallo $]-\pi/2, \pi/2[$ è iniettiva ed ha immagine $\mathbb{R}$. La funzione arcotangente
$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\pi/2, \pi/2\right[$$
è per definizione l'inversa di questa restrizione.




$D \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \neq 0 \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$y = \operatorname{tg} x$

$$D \operatorname{arctg} y = \frac{1}{D \operatorname{tg} x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2};$$
$$\boxed{D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

- La funzione $\sin x$ non è iniettiva, ma la è se ristretta all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dove ha immagine $[-1, 1]$.
La funzione inversa di questa restrizione è per definizione la funzione arcoseno:

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

$D \sin x = \cos x \neq 0 \quad \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, mentre si annulla in $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$.
Perciò $\arcsin y$, che è continua su $[-1, 1]$, è derivabile solo su $]-1, 1[$ e vale

$$\boxed{D \arcsin y = \frac{1}{D \sin x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

poiché $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ per $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

- La funzione $\cos x$ è iniettiva se ristretta all'intervallo $[0, \pi]$, dove ha immagine $[-1, 1]$.
La funzione inversa di questa restrizione è la funzione arcocoseno:

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

$D \cos x = -\sin x \neq 0 \quad \forall x \in ]0, \pi[$, ma $= 0$ in $x = 0$ & $x = \pi$. Perciò $\arccos y$, che è continua su $[-1, 1]$, è derivabile solo su $]-1, 1[$ e vale

$$\boxed{D \arccos y = \frac{1}{D \cos x} = \frac{1}{-\sin x} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

poiché $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ per $x \in [0, \pi]$