4.10.2011

Limiti di successioni

Def.n Sia (a_n) una successione di numeri reali e sia $L \in \mathbb{R}$. Diciamo che (a_n) ha per limite L, in formula

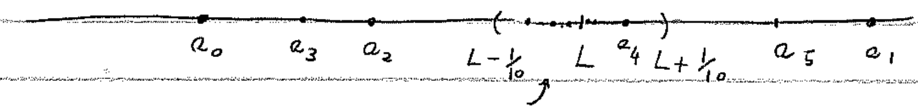
$$\lim_{n \to \infty} a_n = L,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ risulta

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \qquad (*)$$

In questo caso si dice anche che (a_n) è una successione convergente e che (a_n) converge a L, o tende a L, e si scrive $a_n \to L$ (per $n \to \infty$)

Oss 1 La disuguaglianza $(*)$ si può equivalentemente riscrivere come $-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$ o anche $|a_n - L| < \varepsilon$.



a_n sta qui $\forall n \geq 6$

Esempi 1) la successione $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ tende a 0: $\forall \varepsilon > 0$ scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (ad esempio $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$, dove $\lfloor a \rfloor$ indica il più grande intero minore o uguale ad a); allora se $n \geq n_0$ risulta

$$-\varepsilon < 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

2) la successione $((-1)^n)$ non converge: se $L \leq 0$ allora $|(-1)^n - L| \geq 1$ per n pari, mentre se $L \geq 0$ $|(-1)^n - L| \geq 1$ per n dispari.

Oss 2 (Unicità del limite) Una successione ha al più limite: infatti, se per assurdo (a_n) convergesse sia a L che a M, con $L \neq M$, scelto $\varepsilon = \frac{|L-M|}{2}$ dovrebbero esistere $l_0 \in \mathbb{N}$ e $m_0 \in \mathbb{N}$ tali che

$$|a_n - L| < \frac{|L-M|}{2} \quad \forall n \geq l_0 \quad \text{e} \quad |a_n - M| < \frac{|L-M|}{2} \quad \forall n \geq m_0$$

Se fissiamo un $n \geq \max\{l_0, m_0\}$ entrambe le disuguaglianze devono valere, ma ciò non è possibile poiché implica

$$|L-M| \leq |L-a_n| + |a_n - M| < \frac{1}{2}|L-M| + \frac{1}{2}|L-M| = |L-M|$$

ossia $|L-M| < |L-M|$ ↯

Proprietà elementari

- Ogni successione convergente è limitata.

Infatti, se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, scelto $\varepsilon = 1$ deve esistere $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che $L - 1 < a_n < L + 1$ $\forall n \geq m_0$. Dunque l'insieme $\{a_n \mid n \geq m_0\}$ è limitato. D'altra parte l'insieme $\{a_n \mid 0 \leq n < m_0\}$ è senz'altro limitato, essendo un insieme finito, e concludiamo che (a_n) è limitata.
Il viceversa non vale, come mostra l'esempio 2 sopra.

- (Permanenza del segno) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L > 0$, allora $\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > 0$ $\forall n \geq m_0$.

Basta scegliere $\varepsilon = L > 0$: per definizione $\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq m_0$ risulta $0 = L - L = L - \varepsilon < a_n$.

Vale un analogo risultato nel caso $L < 0$.

Oss 3 Diciamo che una certa proposizione dipendente da n, chiamiamola $P(n)$, vale <u>definitivamente</u> se $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_0$, $P(n)$ è vera.
Ad esempio, la proprietà sopra si può riformulare dicendo che una successione che ha limite positivo è definitivamente positiva.

- (confronto, o teorema dei Carabinieri) Supponiamo che $a_n \leq b_n \leq c_n$ e che $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$. Allora anche b_n converge allo stesso limite.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora esistono $l_0, m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.
$\forall n \geq l_0 \quad L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$; $\forall n \geq m_0 \quad L-\varepsilon < c_n < L+\varepsilon$
Se $n \geq \max\{l_0, m_0\}$ si ha

$$L-\varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L+\varepsilon \quad , \quad \text{cvd}.$$

In particolare $\inf a_n \leq \lim a_n \leq \sup a_n$ se (a_n) converge

PROPRIETA' ALGEBRICHE

1) $a_n \to L$ e $b_n \to M \implies a_n + b_n \to L+M$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Risulta

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < L + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad M - \frac{\varepsilon}{2} < b_n < M + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{definitivamente}$$

Sommando, si trova

$$L+M-\varepsilon < a_n + b_n < L+M+\varepsilon \quad \text{definit.}$$

2) $a_n \to L \implies -a_n \to -L$

Infatti $L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$ è equivalente a

$$-L-\varepsilon < -a_n < -L+\varepsilon$$

1) + 2) implicano: $a_n \to L$ e $b_n \to M \Rightarrow a_n - b_n \to L - M$

3) $a_n \to L$ e $b_n \to M \Rightarrow a_n b_n \to LM$

$$|a_n b_n - LM| \leq |a_n b_n - a_n M + a_n M - LM| \leq$$
$$\leq |a_n b_n - a_n M| + |a_n M - LM| \leq |a_n| |b_n - M| + |M| |a_n - L|$$

Sappiamo che (a_n) è limitata, ossia $|a_n| \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Fissiamo $\varepsilon > 0$. Definitivamente

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |b_n - M| < \varepsilon$$

Quindi, sempre definitivamente

$$|a_n b_n - LM| \leq A\varepsilon + |M|\varepsilon = (A + |M|)\varepsilon$$

Dato che la quantità di destra può essere resa piccola a piacere scegliendo ε sufficientemente piccolo, si ha la tesi.

4) $a_n \to L$ con $L \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{L}$

(per la permanenza del segno, $a_n \neq 0$ definitivamente, dunque $\frac{1}{a_n}$ è definitivamente ben definito)

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{L} \right| = \frac{|L - a_n|}{|a_n L|}$$

Dal fatto che $a_n \to L$ deduciamo che definitivamente $|a_n| \geq \frac{|L|}{2}$. Allora definitivamente

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{L} \right| \leq \frac{2}{|L|^2} |a_n - L|$$

da cui la tesi.

4) + 5) implicano: $a_n \to L$ e $b_n \to M \neq 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{L}{M}$

Esempio Determinare $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-5n+1}{2n^2-7}$

$$\frac{3n^2-5n+1}{2n^2-7} = \frac{3 - 5/n + 1/n^2}{2 - 7/n^2} \begin{matrix}\to 3\\ \to 2\end{matrix} \longrightarrow \frac{3}{2}$$

Successioni divergenti

Defn Diciamo che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ovvero che (a_n) diverge a $+\infty$, o tende a $+\infty$, $a_n \to +\infty$, se $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \geq M$ $\forall n \geq n_0$.
Analogamente si definisce $a_n \to -\infty$.

Proprietà elementari

- Ogni successione divergente è illimitata (ma non vale il viceversa, per esempio $a_n = \begin{cases} n & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$)
- La permanenza del segno vale ancora.
- Confronto: se $a_n \geq b_n$ e $b_n \to +\infty \Rightarrow a_n \to +\infty$.
  Se $a_n \leq b_n$ e $b_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$.