5.3.2012

Sviluppi di Taylor

Es 1 Calcolare lo sviluppo di Taylor fino al termine x^5 incluso della funzione $f(x) = x\, tg\, x$, per $x \to 0$.

Un modo di risolvere questo esercizio consiste nel calcolare le derivate di f fino all'ordine 5 e applicare la formula di Taylor. Alternativamente, si possono usare gli sviluppi di $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^{-1}$ nel modo seguente (è anche noto lo sviluppo di Taylor di $tg\, x$, ma si tratta di una formula un po' complicata, che coinvolge i numeri di Bernoulli).

$$f(x) = x \cdot \sin x \, \frac{1}{\cos x} = x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^{-1}$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^5)\right)\left(1 - \left(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\right)^{-1}$$

Adesso usiamo lo sviluppo

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots + u^n + o(u^n)$$

con

$$u = \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad e \quad n = 2$$

$$\left(1 - \left(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\right)^{-1} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) + \left(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 +$$

$$+ o\left(\left(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$. Quindi

$$f(x) = \left(x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) =$$

$$= x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)$$

Es 2 Determinare $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x}\right)$

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin^2 x - x^2}{x \sin x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\,\frac{\left(x - x^3/6 + o(x^4)\right)^2 - x^2}{x\,(x + o(x))} = \frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^5)}{x^4 + o(x^4)}$$

$$= \frac{-1/3 + o(x)}{1 + o(1)} \longrightarrow -\frac{1}{3} \quad \text{per } x \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x}\right) = -\frac{1}{3}$$

Massimi e minimi locali

Sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione

Sappiamo che se $x_0 \in]a,b[$ è punto di massimo o minimo locale di f e f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$ (principio di Fermat), ma che non sempre i punti dove si annulla la derivata sono punti di massimo o minimo locale (si consideri $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$)

Nell'ipotesi in cui f sia derivabile 2 volte in x_0, vogliamo capire quali condizioni su $f''(x_0)$ garantiscano che un punto $x_0 \in]a,b[$ con $f'(x_0) = 0$ sia punto di massimo oppure punto di minimo locale. Dalla formula di Taylor al secondo ordine ricaviamo che:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$$

per $x \to x_0$

Dunque:

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^2 \left(\frac{1}{2} f''(x_0) + o(1) \right)$$

Quando $f''(x_0) > 0$, il membro destro è positivo per x vicino a x_0 ma $x \neq x_0$. In questo caso, x_0 è punto di minimo locale stretto, ossia $\exists\, \delta > 0$ tale che $f(x) > f(x_0)$ per $|x - x_0| < \delta$ e $x \neq x_0$.

Analogamente, quando $f''(x_0) < 0$ il punto x_0 è punto di massimo locale stretto.

Se invece $f''(x_0) = 0$, non abbiamo informazioni sufficienti per concludere alcunché: le funzioni $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$, $h(x) = -x^4$ hanno tutte le prime due derivate nulle in $x_0 = 0$, ma $x_0 = 0$ è punto di minimo per g, di massimo per h, nessuna delle due cose per f.

Però possiamo continuare a derivare finché non troviamo una derivata diversa da zero. Si hanno due casi:

1) La prima derivata non nulla è di ordine pari, ossia $f'(x_0) = \dots = f^{(2m-1)}(x_0) = 0$ ma $f^{(2m)}(x_0) \neq 0$ con $m \geq 1$. Allora la formula di Taylor ci dà:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{(2m)!} f^{(2m)}(x_0)(x - x_0)^{2m} + o((x - x_0)^{2m})$$

$$= (x - x_0)^{2m} \left(\frac{1}{(2m)!} f^{(2m)}(x_0) + o(1) \right)$$

e come prima deduciamo che:

a) Se $f^{(2m)}(x_0) > 0$ allora x_0 è punto di minimo locale stretto.
b) Se $f^{(2m)}(x_0) < 0$ allora x_0 è punto di massimo locale stretto.

2) La prima derivata non nulla è di ordine dispari, ossia $f'(x_0) = \dots = f^{(2m)}(x_0) = 0$ ma $f^{(2m+1)}(x_0) \neq 0$ con $m \geq 1$. Allora:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(x_0)(x-x_0)^{2m+1} + o((x-x_0)^{2m+1})$$
$$= (x-x_0)^{2m+1}\left(\frac{1}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(x_0) + o(1)\right)$$

Dato che $(x-x_0)^{2m+1}$ è positivo per $x > x_0$ e negativo per $x < x_0$, qualunque sia il segno di $f^{(2m+1)}(x_0)$ concludiamo che x_0 non è punto né di massimo locale né di minimo locale.

<u>Es</u> Dire se 0 è punto di massimo locale, di minimo locale, o nessuna delle due cose per la funzione

$$f(x) = e^{1-\cos x} - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

Una possibilità è derivare finché non si trova una derivata $\neq 0$:

$$f'(x) = \sin x \, e^{1-\cos x} - \frac{2x}{2}\frac{1}{1+x^2} = \sin x \, e^{1-\cos x} - \frac{x}{1+x^2}$$

$f'(0) = 0$

$$f''(x) = (\cos x + \sin^2 x)\, e^{1-\cos x} - \frac{1}{1+x^2} +$$

$$+ \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$f''(0) = 0$

$$f'''(x) = (-\sin x + 3\sin x \cos x + \sin^3 x)\, e^{1-\cos x} +$$

$$+ \frac{6x}{(1+x^2)^2} - \frac{8x^3}{(1+x^2)^3}$$

$f'''(0) = 0$

$$f^{(4)}(x) = (-\cos x - 4\sin^2 x + 3\cos^2 x + 6\sin^2 x \cos x + \sin^4 x)\, e^{1-\cos x}$$

$$- \frac{48x^2}{(1+x^2)^3} + \frac{6}{(1+x^2)^2} + \frac{48x^4}{(1+x^4)^4}$$

$f^{(4)}(0) = 2 + 6 = 8 \implies 0$ è punto di minimo locale (stretto)

Alternativamente, possiamo usare gli sviluppi per $x \to 0$:

$$f(x) = e^{1-\cos x} - \frac{1}{2}\log(1+x^2) = e^{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)} - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 + o(x^4)$$

$$- \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{x^4}{24} + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

$= 1 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \implies 0$ è punto di minimo locale (stretto)

Oss Se f è una funzione pari allora f' è una funzione dispari. Viceversa, se f è dispari allora f' è pari. Inoltre le funzioni dispari si annullano per $x = 0$. Mettendo assieme questi fatti deduciamo che:

f pari $\Rightarrow$ $f^{(2m+1)}(0) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

f dispari $\Rightarrow$ $f^{(2m)}(0) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

La funzione $f(x) = e^{1-\cos x} - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$ è pari, quindi la prima derivata non nulla in $x = 0$, se c'è, è necessariamente di ordine pari.

Attenzione: esistono anche funzioni non costanti tali che tutte le derivate in un dato punto si annullano. Un esempio è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

che verifica $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Questa funzione ha un minimo (stretto ed assoluto) in $x = 0$, ma non potremmo scoprirlo guardando solamente i valori delle derivate successive in 0.

Un polinomio di Taylor utile

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2m}), \quad \text{per } x \to 0}$$

per ogni $m \geq 1$