6.3.2012

Formula di Taylor con resto di Lagrange

L'identità
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad \text{per } x \to x_0$$
fornisce informazioni su come $f(x)$ tende a $f(x_0)$ per $x \to x_0$, però non dà informazioni su $f(x)$ per x fissato $\neq x_0$.
Tali informazioni sono invece fornite dal teorema di Lagrange, che può essere espresso nella forma

$$f(x) = f(x_0) + f'(z)(x-x_0)$$

con z compreso tra x_0 e x (ossia z della forma $z = x_0 + \theta(x-x_0)$ con $0 < \theta < 1$).

Analogamente, la formula di Taylor con resto di Peano

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \to x_0$$

con $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ fornisce informazioni sui valori di $f(x)$ per $x \to x_0$, ma non su $f(x)$ per x fissato $\neq x_0$. Tali informazioni sono invece fornite dal seguente:

Teorema (Formula di Taylor con resto di Lagrange)
Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte e siano $x_0, x \in]a,b[$

Allora esiste $\theta \in]0,1[$ tale che

$$f(x) = P_m(x) + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))(x-x_0)^{m+1}$$

Oss Per $m=0$, questo è esattamente il teorema di Lagrange.

dim Possiamo supporre $x \neq x_0$
Definiamo $M \in \mathbb{R}$ dalla relazione
$$f(x) = P_m(x) + M(x-x_0)^{m+1}$$
Vogliamo dimostrare che
$$M = \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(z) \qquad (*)$$

con z strettamente compreso tra x_0 e x. Poniamo
$$g(t) = f(t) - P_m(t) - M(t-x_0)^{m+1}$$
Allora
$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(m)}(x_0) = 0$$
Dato che anche $g(x) = 0$ (per la definizione di M), per il teorema di Rolle esiste z_1 strettamente compreso tra x_0 e x tale che $g'(z_1) = 0$.
Insieme a $g'(x_0) = 0$, una seconda applicazione del teorema di Rolle fornisce un z_2 strettamente compreso tra x_0 e z_1 tale che $g''(z_2) = 0$.
Iterando il ragionamento troviamo z_{m+1} strettamente compreso tra x_0 e z_m, e dunque tra x_0 e x, tale che $g^{(m+1)}(z_{m+1}) = 0$. Allora

$$0 = g^{(m+1)}(z_{m+1}) = f^{(m+1)}(z_{m+1}) - M(m+1)!$$

dunque $z = z_{m+1}$ soddisfa $(*)$ $\square$

Esempi

1) Valutare l'errore che si commette scrivendo

$$e \simeq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} = \frac{12+3+1}{6} = \frac{8}{3}$$

Dallo sviluppo dell'esponenziale al terzo ordine

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{e^z}{4!} x^4$$

con $z \in]0, x[$, ricaviamo, per $x = 1$,

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{e^z}{4!} = \frac{8}{3} + \frac{e^z}{4!}$$

L'errore è dunque $\mathcal{E} := \frac{e^z}{4!}$. Dato che $z < 1$, troviamo la stima

$$0 < \mathcal{E} < \frac{e}{4!} < \frac{3}{4!} = \frac{1}{8}$$

2) Dimostrare che $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \log 2$

ossia che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$

Sia $f(x) = \log(1+x)$. Come già abbiamo calcolato,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \dots, \quad f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

Per la formula di Taylor con resto di Lagrange applicata a f, $x = 1$, $x_0 = 0$:

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + R_n \quad \text{dove}$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \frac{n!}{(1+z)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+z)^{n+1}}$$

con $0 < z < 1$. Allora

$$|R_n| = \frac{1}{n+1} \frac{1}{(1+z)^{n+1}} < \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to \infty$$

Perciò (R_n) è infinitesimo, da cui

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2 \qquad \triangle$$

3) Dimostrare che $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$,

ossia $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} := \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

Consideriamo $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Sappiamo che $f(1) = \frac{\pi}{4}$, dunque

$$\frac{\pi}{4} = f(1) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \frac{f^{(m+1)}(z)}{(m+1)!} 1^{m+1}$$

Ricaviamo le derivate successive di $f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(1+ix)(1-ix)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+ix} + \frac{1}{1-ix}\right)$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{-i}{(1+ix)^2} + \frac{i}{(1-ix)^2}\right) \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2i \cdot (-i)}{(1+ix)^3} + \frac{2i \cdot i}{(1-ix)^3}\right)$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{(-3i)(-2i)(-i)}{(1+ix)^4} + \frac{3i \cdot 2i \cdot i}{(1-ix)^4}\right)$$

In generale

$$f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!}{2}\left(\frac{(-i)^{k-1}}{(1+ix)^k} + \frac{i^{k-1}}{(1-ix)^k}\right)$$

da cui

$$f^{(k)}(0) = \frac{(k-1)!}{2}\left((-i)^{k-1} + i^{k-1}\right)$$

Dato che $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ e tutto si ripete con periodo 4,

$$(-i)^{k-1} + i^{k-1} = \begin{cases} 1 + 1 = 2 & \text{se } k \equiv 1 \pmod 4 \\ -i + i = 0 & \text{se } k \equiv 2 \pmod 4 \\ -1 - 1 = -2 & \text{se } k \equiv 3 \pmod 4 \\ i - i = 0 & \text{se } k \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \equiv 0, 2 \pmod 4 \\ (k-1)! & \text{se } k \equiv 1 \pmod 4 \\ -(k-1)! & \text{se } k \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

o, equivalentemente:

$$f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k (2k)!$$

Quindi

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + R_m \text{ , dove}$$

$$R_m = \frac{1}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(z)$$

Stimiamo l'errore R_m:

$$|R_m| = \frac{1}{(2m+1)!} \left| \frac{(2m)!}{2} \left(\frac{(-i)^{2m}}{(1+iz)^{2m+1}} + \frac{(i)^{2m}}{(1-iz)^{2m+1}} \right) \right|$$

$$= \frac{1}{2m+1} \cdot \frac{1}{2} \left| \frac{(-1)^m}{(1+iz)^{2m+1}} + \frac{(-1)^m}{(1-iz)^{2m+1}} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2m+1} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|1+iz|^{2m+1}} + \frac{1}{|1-iz|^{2m+1}} \right)$$

Dato che $z \in \mathbb{R}$, $|1 \pm iz| \geq 1$, quindi

$$|R_m| \leq \frac{1}{2m+1} \longrightarrow 0$$