6.10.2011

Proprietà algebriche delle successioni divergenti

1) $a_n \to +\infty$ e (b_n) limitata inferiormente $\Longrightarrow$ $a_n + b_n \to +\infty$
In particolare, questo è vero se $b_n \to b \in]-\infty, +\infty]$

Infatti, per ipotesi $b_n \geq c$ $\forall n$. Fissato M, risulta $a_n \geq M - c$ definitivamente. Allora
$$a_n + b_n \geq M - c + c \geq M \quad \text{definitivamente}$$
Analogamente:
1') $a_n \to -\infty$ e (b_n) limitata superiormente $\Rightarrow$ $a_n + b_n \to -\infty$

2) $a_n \to +\infty$ e $b_n \geq c > 0$ definitivamente $\Rightarrow$ $a_n b_n \to +\infty$
In particolare questo è vero se $b_n \to b \in]0, +\infty]$

Fissato M, risulta $a_n \geq \frac{M}{c}$ definitivamente. Allora
$a_n b_n \geq \frac{M}{c} c = M$ definitivamente

Casi analoghi con $a_n \to -\infty$ e/o $b_n \leq c < 0$ definitiv.

3) $|a_n| \to +\infty \Longrightarrow \frac{1}{a_n} \to 0$

Fissato $\varepsilon > 0$, $|a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ definit. $\Rightarrow \left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{|a_n|} < \varepsilon$ def.

4) $a_n > 0$ e $a_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to +\infty$

Fissato $M > 0$, $a_n < \frac{1}{M}$ def $\Rightarrow \frac{1}{a_n} > M$ def
Analogamente:

4') $a_n < 0$ e $a_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to -\infty$

5) $a_n \to 0$ e (b_n) limitata $\Rightarrow$ $a_n b_n \to 0$

Infatti $|b_n| \leq c \quad \forall n$. Fissato $\varepsilon > 0$, $|a_n| < \frac{\varepsilon}{c}$ definit.
$\Rightarrow |a_n b_n| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{c} c = \varepsilon$ def.

Combinando insieme 2), 3), 4) e 5) si ottengono vari risultati sul comportamento di $\frac{a_n}{b_n}$. Per esempio

- (a_n) limitata, $|b_n| \to +\infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0$
- $a_n \geq a > 0$ definit., $b_n \to 0$, $b_n > 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to +\infty$

<u>Forme indeterminate</u> Non possiamo invece dire niente di generale per le forme

$$+\infty - \infty \quad , \quad \infty \cdot 0 \quad , \quad \frac{\infty}{\infty} \quad , \quad \frac{0}{0}$$

<u>Es 1</u> Determinare $\lim_{n \to \infty} \frac{1 - n^2}{n}$

$$\frac{1-n^2}{n} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} - \underbrace{n}_{\to +\infty} \longrightarrow -\infty$$

<u>Es 2</u> $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} j$

$$\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\to 0} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

<u>Es 3</u> $\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \sqrt{n}$

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n} = \frac{\overbrace{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}^{n+1-n = 1}\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1}$$

Ma $\frac{n+1}{n} \to 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{n+1}{n}} \to \sqrt{1} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} \to \frac{1}{2}$

Limiti importanti

1) Sia $a \in \mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{n \to \infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

Se $a > 1$, $\quad a^n = (1 + (a-1))^n \overset{\text{(Bernoulli)}}{\geq} 1 + n(a-1) \to +\infty$
e si conclude per confronto.
Se $a = 1$, $\quad a^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Se $-1 < a < 1$ si ha $|a^n| = |a|^n = \dfrac{1}{\underbrace{|a^{-1}|^n}_{\to +\infty}} \longrightarrow 0$

Se $a \leq -1$, allora $a^n \geq 1$ per n pari e ≤ -1 per n dispari $\Rightarrow$ non ha limite.

2) Se $a > 0$ allora $\sqrt[n]{a} \to 1$

Caso $a \geq 1$: poniamo $b_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Si ha $b_n \geq 0$ e da Bernoulli

$$a = (1 + b_n)^n \geq 1 + n b_n$$

si deduce

$$b_n \leq \frac{a-1}{n} \to 0$$

Quindi per confronto $b_n \to 0$, da cui $\sqrt[n]{a} \to 1$.
Caso $0 < a < 1$: ci si riconduce al caso precedente:

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{a^{-1}}}_{\to 1}} \longrightarrow 1$$

Binomio di Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

dove $\binom{n}{k}$ = numero dei sottoinsiemi di k elementi di un insieme di n elementi

coefficiente binomiale

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{per } 0 \leq k \leq n \text{ interi}$$

(Convenzione: $0! = 1$)

In particolare: $\forall x \geq 0$ risulta

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots + nx^{n-1} + x^n$$

$$\geq \sum_{k=0}^{h} \binom{n}{k} x^k \qquad \text{per } h \leq n$$

che migliora la disuguaglianza di Bernoulli.

3) $\sqrt[n]{n} \to 1$

Poniamo $b_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Allora $b_n \geq 0$ e

$$n = (1+b_n)^n \geq 1 + n b_n + \frac{n(n-1)}{2} b_n^2 \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} b_n^2$$

$$\Rightarrow b_n^2 \leq \frac{n-1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n} \to 0 \quad \Rightarrow b_n^2 \to 0$$

$$\Rightarrow b_n = \sqrt{b_n^2} \to 0 \qquad \square$$

4) $\sqrt[n]{n^k} \longrightarrow 1 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$

Infatti $\sqrt[n]{n^k} = (\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1})^k \longrightarrow 1^k = 1$

5) Se $a > 1$ e $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty$

Scrivo $a = 1 + b$ con $b > 0$. Allora dal binomio di Newton, se $n \geq k+1$

$$a^n = (1+b)^n \geq \binom{n}{k+1} b^{k+1}$$

$\Rightarrow \frac{a^n}{n^k} \geq b^{k+1} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k+1}$ e basta mostrare che

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k+1} \longrightarrow +\infty \quad \text{per } n \to \infty$$

Questo segue dal fatto che "il binomiale $\binom{n}{h}$ cresce come n^h per $n \to \infty$". Più precisamente:

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k+1} = \frac{n\overbrace{(n-1)\dots(n-k)}^{k \text{ fattori}}}{n^k} = \underbrace{n}_{\downarrow\, +\infty} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\to 1}\underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{\to 1}\cdots\underbrace{\left(1-\frac{k}{n}\right)}_{\to 1}$$

quindi questa successione diverge

6) $\sqrt[n]{n!} \longrightarrow +\infty$

Se $n > k$, si ha

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}\ \sqrt[n]{(k+1)(k+2)\ldots n} \geq \sqrt[n]{k!}\ \sqrt[n]{(k+1)^{n-k}}$$
$$= \sqrt[n]{k!}\,(k+1)\sqrt[n]{(k+1)^{-k}} = \sqrt[n]{\frac{k!}{(k+1)^k}}\,(k+1) \xrightarrow[\text{per (2)}]{} k+1 \quad \text{per } n\to\infty$$

Quindi $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{n!}$ è definitivamente maggiore di una successione che tende a k. Per l'arbitrarietà di k, $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$

Es 4 $\lim_{n \to \infty} \frac{3^n + n^2}{2^n + n^3}$

$$\frac{3^n + n^2}{2^n + n^3} = \frac{3^n (1 + n^2 3^{-n})}{2^n (1 + n^3 2^{-n})} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1 + n^2 3^{-n}}{1 + n^3 2^{-n}}$$

Per (5), $n^2 3^{-n} \to 0$ e $n^3 2^{-n} \to 0$, quindi la frazione tende a 1. D'altra parte, $\left(\frac{3}{2}\right)^n \to +\infty$ per (1), quindi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3^n + n^2}{2^n + n^3} = +\infty$$