6.12.2011

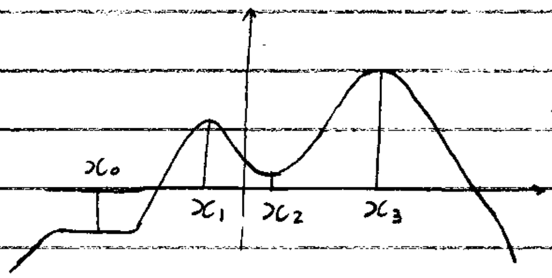
Massimi e minimi locali

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$.

Def^n Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di massimo locale per f se esiste $\varepsilon > 0$ tale che x_0 è punto di massimo per f ristretta a $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap A$, ossia

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in]x - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap A$$

Analogamente si definisce un punto di minimo locale.



x_1 e x_3 sono punti di massimo locale, x_3 è anche punto di massimo (assoluto)
x_2 è punto di minimo locale
x_0 è contemporaneamente punto di max locale e punto di min locale.

Teorema (principio di Fermat) Sia $x_0 \in]a, b[$ un punto di massimo locale oppure di minimo locale della funzione $f:]a, b[\to \mathbb{R}$. Se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

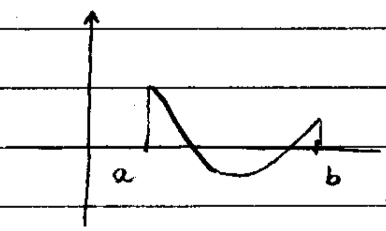
dim Per assurdo, supponiamo $f'(x_0) \neq 0$. A meno di scambiare f con $-f$ (operazione che trasforma i punti di massimo locale in punti di minimo locale, e viceversa) possiamo supporre che $f'(x_0) > 0$.

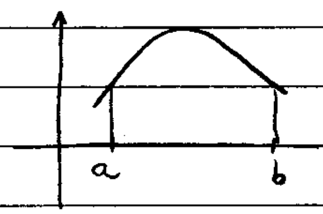
Dato che $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, dalla permanenza del segno deduciamo che $\exists\, \varepsilon > 0$ tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \qquad \forall\, x \in \,]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\, \setminus \{x_0\}$$

Ma allora $f(x) - f(x_0) > 0$, ossia $f(x) > f(x_0)$, per $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$, mentre $f(x) - f(x_0) < 0$, ossia $f(x) < f(x_0)$ per $x_0 - \varepsilon < x < x_0$.
Queste disuguaglianze mostrano che x_0 non è né punto di massimo locale né punto di minimo locale $\lightning$ $\square$

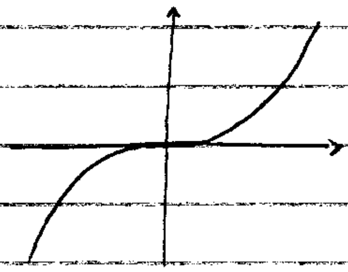
<u>Oss</u> Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Ragionando come sopra, si dimostra che se f è derivabile in a allora:
1) se a è punto di massimo locale, allora $f'(a) \leq 0$
2) se a è punto di minimo locale, allora $f'(a) \geq 0$





Risultati analoghi, con le disuguaglianze invertite, valgono per l'estremo destro b.

Oss Se $f'(x_0) = 0$, x_0 potrebbe non essere né punto di massimo locale né di minimo locale: si consideri ad esempio la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^3$



$f'(x) = 3x^2$
$f'(0) = 0$, ma 0 non è punto né di max locale né di min locale.

Il teorema di Lagrange

Teorema (Lagrange) Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Allora esiste $x_0 \in]a,b[$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Esempio Il sistema autostradale Tutor rileva che un auto è passata al Km 37 alle 15:12 e al Km 187 alle 16:12. Se indichiamo con $f(t)$ la posizione dell'auto all'istante t, $a := 15:12$, $b = 16:12$, si ha che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(187 - 37)\ \text{Km}}{(16:12 - 15:12)\ \text{h}} = \frac{150}{1} \frac{\text{Km}}{\text{h}}$$

Tutor conclude che in un istante intermedio tra le 15:12 e le 16:12 l'auto viaggiava a 150 Km/h.

Cominciamo con il dimostrare un caso particolare:

<u>Teorema di Rolle</u> Nelle stesse ipotesi del teorema di Lagrange, supponiamo inoltre che $f(b) = f(a)$. Allora vale la conclusione del Teorema di Lagrange, che in questo caso è: $\exists\, x_0 \in]a,b[$ tale che $f'(x_0) = 0$.

<u>dim</u>

Se f è costante, allora $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$ e la tesi è ovvia. Possiamo supporre allora che f non sia costante. A meno di scambiare f con $-f$, possiamo supporre che in qualche punto di $]a,b[$ f assuma valori maggiori del numero $f(a) = f(b)$, ossia che

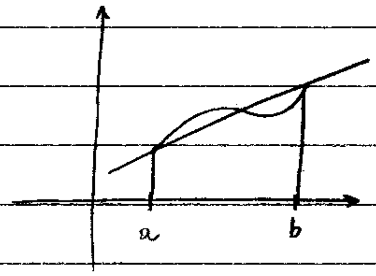
$$(*) \qquad \sup_{x \in [a,b]} f(x) > f(a) = f(b)$$

Essendo f una funzione continua sull'insieme chiuso e limitato $[a,b]$, per il Teorema di Weierstrass f possiede massimo:
$\exists\, x_0 \in [a,b]$ tale che

$$f(x_0) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

Grazie a $(*)$, x_0 è un punto interno all'intervallo, dunque il principio di Fermat implica che $f'(x_0) = 0$ $\square$

dimostrazione del teorema di Lagrange



Sia g la funzione avente per grafico la retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, ossia:

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Consideriamo la funzione $h(x) = f(x) - g(x)$. Dato che $h(a) = h(b) = 0$, h soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, dunque esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che $h'(x_0) = 0$. Dato che

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

il fatto che $h'(x_0) = 0$ equivale a $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Perciò x_0 è il punto richiesto. $\square$

Conseguenze del teorema di Lagrange

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile.

- f è costante $\Leftrightarrow$ $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$

L'implicazione $\Rightarrow$ segue banalmente dalla definizione di derivata, come abbiamo già visto.

Dimostriamo $\Leftarrow$. E' sufficiente mostrare che se $x < y$

allora $f(x) = f(y)$. Per il Teorema di Lagrange applicato all'intervallo $[x,y]$, esiste $z \in]x,y[$ tale che

$$f'(z) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

Dato che $f'(z) = 0$, ciò implica $f(y) - f(x) = 0$, ossia $f(x) = f(y)$. $\triangle$

- f è crescente $\iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

L'implicazione $\Rightarrow$ segue facilmente dalla definizione di derivata: dal fatto che $f(x+h) \geq f(x)$ per $h > 0$ e $f(x+h) \leq f(x)$ per $h < 0$ segue che

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \quad \text{per } h \neq 0$$

e passando al limite per $h \to 0$ si ottiene $f'(x) \geq 0$.

Dimostriamo $\Leftarrow$. Siano $x, y \in I$, $x < y$. Per il Teorema di Lagrange applicato all'intervallo $[x,y]$, esiste $z \in]x,y[$ tale che

$$f'(z) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

Dato che $f'(z) \geq 0$ e $y - x > 0$, deduciamo che $f(y) - f(x) \geq 0$, ossia $f(y) \geq f(x)$, il che mostra che f è crescente.

Analogamente vale:

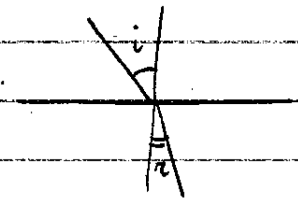
- f è decrescente $\iff f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$

Oss I risultati sopra non valgono se il dominio di f non è un intervallo: $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ha derivata nulla sul suo dominio, ma non è costante.

Problema Come funziona l'arcobaleno?

Ricordiamo che un raggio luminoso che passa da un mezzo ad un altro (ad esempio dall'aria all'acqua) subisce una deviazione, fenomeno noto come rifrazione: detti i e r gli angoli che il raggio incidente e quello rifratto formano con la perpendicolare alla superficie di separazione tra i due mezzi, risulta

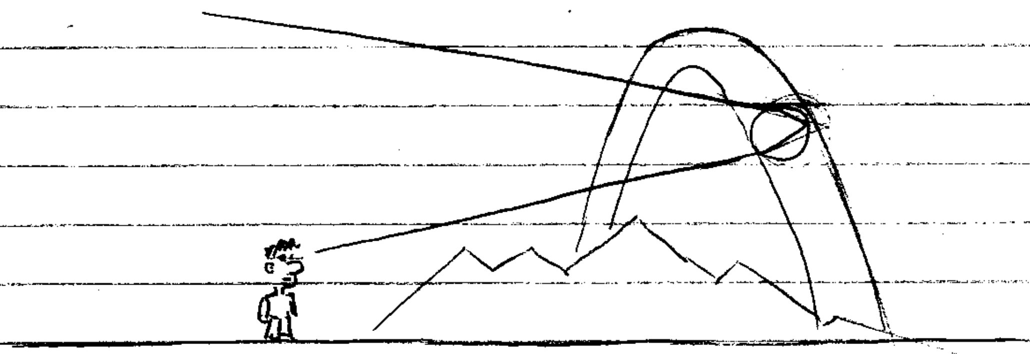
$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$



dove n è un numero che si chiama indice di rifrazione tra i due mezzi. Nel caso del passaggio aria-acqua n vale circa 1,33 (l'angolo r risulta pertanto minore di i). Per il passaggio acqua-aria l'indice di rifrazione è il reciproco $1/n$, quindi la luce segue il percorso inverso.

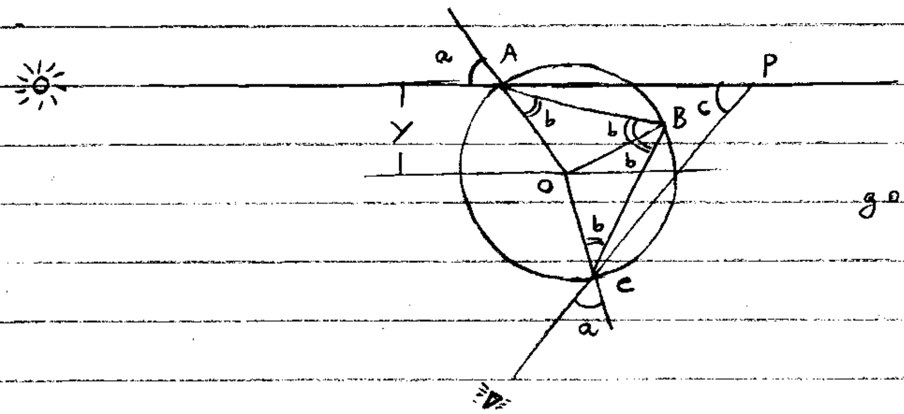
Scendendo più nel dettaglio, l'indice di rifrazione dipende dalla lunghezza d'onda della luce: per il passaggio aria-acqua, l'indice di rifrazione vale $n_+ = 1,34451$ per la luce violetta e $n_- = 1,33141$ per la luce rossa.

Se spunta il sole subito dopo la pioggia, i suoi raggi colpiscono le gocce d'acqua ancora presenti nell'atmosfera, vi entrano subendo la rifrazione, vengono riflesse sul fondo della goccia (con la regola angolo incidente = angolo riflesso), escono dalla goccia subendo una nuova rifrazione e venne a colpire l'occhio dell'osservatore:



Quindi l'arcobaleno si trova sempre dal lato opposto del sole. Vogliamo capire quale è la sua posizione e come sono ordinati i colori.

Consideriamo un raggio solare che colpisce una goccia formando un angolo a con la perpendicolare alla superficie e calcoliamo l'angolo c tra le direzioni del raggio dal sole e di quello che arriva all'osservatore.



L'angolo incidente a e quello rifratto b sono legati dalla relazione

$$\frac{\sin a}{\sin b} = n \quad , \text{ dove } \quad n \simeq 1,33$$

Il triangolo AOB è isoscele, quindi $O\hat{B}A = b$; per

la legge di riflessione, $O\hat{B}C = O\hat{B}A = b$ e, dato che anche OBC è isoscele, $B\hat{C}O = b$. Quindi il raggio che arriva all'osservatore forma un angolo a con la retta OC (la rifrazione acqua-aria trasforma l'angolo b nell'angolo a).
Determiniamo c: la somma degli angoli interni del quadrilatero $APCO$ vale 2π, dunque

$$\underbrace{P\hat{A}O}_{=a} + \underbrace{A\hat{P}C}_{=c} + \underbrace{P\hat{C}O}_{=a} + \underbrace{C\hat{O}A}_{=2(\pi-2b)} = 2\pi$$

dove abbiamo usato il fatto che $C\hat{O}A = 2\,A\hat{O}B$ vale π meno $O\hat{A}B + O\hat{B}A = 2b$. Dall'identità sopra ricaviamo

$$c = 4b - 2a$$

Esprimiamo ora c in funzione della distanza y del raggio solare dal centro della goccia, che supponiamo di raggio r. Dato che i raggi che colpiscono la parte inferiore della goccia vengono deviati verso l'alto, ci interessano soltanto gli y tra 0 e r.
Risulta

$$y = r \sin a, \quad \text{da cui} \quad a = \arcsin \frac{y}{r}$$

Dato che $\sin b = \frac{1}{n} \sin a$, troviamo

$$b = \arcsin\left(\frac{1}{n}\sin a\right) = \arcsin \frac{y}{nr}$$

Perciò

$$c(y) = 4 \arcsin \frac{y}{nr} - 2 \arcsin \frac{y}{r}$$

Al variare di $y \in [0, r]$, varia anche l'angolo $c(y)$ tra la luce solare ed il raggio che arriva all'osservatore. Come mai molti raggi si accumulano intorno ad un angolo ben preciso, formando l'arcobaleno? Per rispondere, studiamo la funzione $c(y)$. La sua derivata vale

$$c'(y) = \frac{4}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{m^2 r^2}}} \frac{1}{mr} - \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}}} \frac{1}{r}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{r^2 m^2 - y^2}} - \frac{2}{\sqrt{r^2 - y^2}} .$$

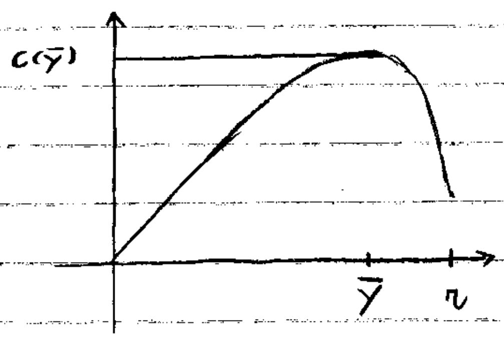
Studiamo il segno di $c'(y)$: $c'(y) \geq 0 \iff$

$$\frac{4}{\sqrt{r^2 m^2 - y^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{r^2 - y^2}} \iff 2\sqrt{r^2 - y^2} \geq \sqrt{r^2 m^2 - y^2}$$

$$\iff 4(r^2 - y^2) \geq r^2 m^2 - y^2 \iff (4 - m^2) r^2 \geq 3y^2$$

$$\iff 0 \leq y \leq \bar{y} := \sqrt{\frac{4 - m^2}{3}}\, r$$

Dato che $m > 1$, il numero $\frac{4 - m^2}{3}$ è minore di 1, da cui $0 < \bar{y} < r$. Perciò c è crescente in $[0, \bar{y}]$ e decrescente in $[\bar{y}, r]$:



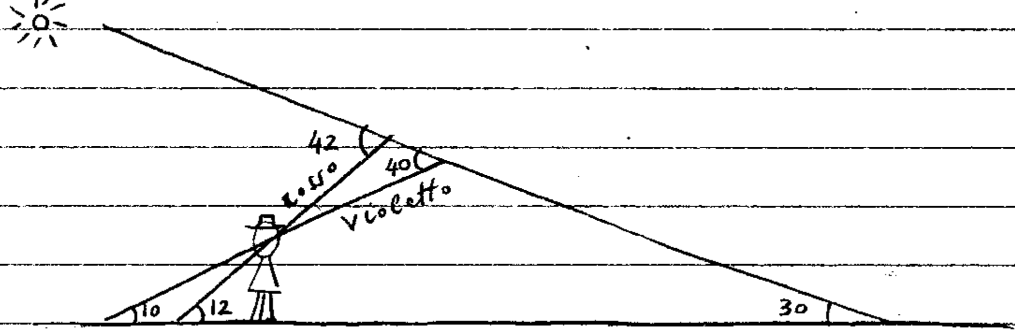
Dato che $c'(\bar{y}) = 0$, il grafico della funzione c è piatto vicino a $\bar{y}$, ossia c'è un intervallo di valori della y nel quale $c(y)$ assume circa lo stesso valore: perciò molti raggi di luce si concentrano sull'angolo $c(\bar{y})$, che vale

$$c(\bar{y}) = 4 \arcsin \frac{1}{n}\sqrt{\frac{4-n^2}{3}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$$

Si osservi che $c(\bar{y})$ non dipende dal raggio r della goccia: gocce di raggio diverso concentrano la luce su uno stesso angolo.
Sostituendo i valori $n_+ = 1,34451$ (luce violetta) e $n_- = 1,33141$ (luce rossa), troviamo gli angoli

$$c_+ = 0,70569 = 40,43^\circ \quad , \quad c_- = 0,73845 = 42,31^\circ$$

Quindi la luce violetta arriva all'osservatore formando un angolo di circa 40° con la direzione della luce solare, mentre per la luce rossa questo angolo vale circa 42°.
Se il sole si trova 30° sopra l'orizzonte, la situazione è questa:



In questo caso, l'arco rosso raggiunge 12° sopra l'orizzonte e quello violetto, che è sempre più interno, 10°.
Se il sole è più alto di 42°, l'arcobaleno non si può formare (alle nostre latitudini, l'arcobaleno si vede soltanto al mattino o al pomeriggio).

Il resto della luce deviata dalle gocce arriva con angoli inferiori a $c(\bar{\gamma})$ (che è il massimo della funzione c): questo spiega come mai la porzione di cielo sotto l'arcobaleno è più chiara di quella sopra.

Infine, i raggi che nella goccia vengono riflessi due volte formano un secondo arcobaleno, che talvolta è visibile: chi ha voglia e tempo di eseguire calcoli analoghi a quelli svolti qui ma con 2 riflessioni, scoprirà che il secondo arcobaleno forma un angolo compreso tra i 50° e i 53° con la direzione dei raggi provenienti dal sole ed i suoi colori sono invertiti (rosso all'interno, violetto all'esterno).