7.5.2011

Giustapposizione di intervalli

Prop Siano $a<b<c$ e $f:[a,c]\to\mathbb{R}$. Sono fatti equivalenti:

1) $f\in\mathcal{R}(a,c)$
2) $f|_{[a,b]}\in\mathcal{R}(a,b)$ e $f|_{[b,c]}\in\mathcal{R}(b,c)$

Inoltre, se valgono (1) o (equivalentemente) (2):

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \qquad (*)$$

Questa proposizione segue facilmente dai due fatti seguenti:

- ad una coppia di suddivisioni $p\in\mathcal{P}(a,b)$ e $q\in\mathcal{P}(b,c)$ possiamo associare la suddivisione $p\cup q\in\mathcal{P}(a,c)$, per la quale risulta
  $s(f;p\cup q) = s(f,p)+s(f,q)$
  $S(f;p\cup q) = S(f,p)+S(f,q)$
- Se $\tau=\{a=t_0<t_1<\dots<t_n=c\}\in\mathcal{P}(a,c)$, scelto $0\leq j<n$ tale che $t_j\leq b<t_{j+1}$, si ha che $\tau=p\cup q$ con $p=\{t_0,t_1,\dots,t_j,b\}$ e $q=\{b,t_{j+1},\dots,t_n\}$

__Convenzione__ Se $a\leq b$ si pone $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$

Con questa convenzione, $(*)$ vale comunque ordinati siano a,b,c.

Media integrale

Se $f\in\mathcal{R}(a,b)$, definiamo __media integrale di f su $[a,b]$__ il numero $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Da $\quad (b-a) \inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f \quad$ segue che

$$\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f \qquad (**)$$

<u>Prop</u> Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora esiste $t \in [a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(t)$$

Infatti per il teorema dei valori intermedi, f assume ogni valore compreso tra $\inf f$ e $\sup f$ e per $(**)$ la media integrale di f è uno di questi valori.

<u>Teorema fondamentale del calcolo integrale</u>. Sia $f \in \mathcal{R}(a,b)$ e poniamo

$$F : [a,b] \to \mathbb{R} \quad , \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Allora

1) F è Lipschitziana.
2) Se f è continua in $x_0 \in [a,b]$, allora F è derivabile in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.
3) Se f è continua e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ è tale che $g' = f$, allora $\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$

<u>dim</u> 1) Se $a \leq x \leq y \leq b$, si ha

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| = \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \leq$$

$$\leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq (y-x) \sup_{[x,y]} |f| \leq (y-x) \sup_{[a,b]} |f| .$$

2) $\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \dfrac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right) =$

$= \dfrac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$ e per (**):

$$\inf_{[x_0,x_0+h]} f \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq \sup_{[x_0,x_0+h]} f$$

Per $h \to 0$ i lati sinistro e destro di queste disuguaglianze tendono a $f(x_0)$, dunque:

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

3) Per il punto 2), $F' = f$. Quindi $(g-F)' = 0$, da cui $g(x) - F(x) = c \quad \forall x \in [a,b]$.
Allora $\forall x, y \in [a,b]$
$$F(y) - F(x) = g(y) - g(x)$$
Infine
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) = F(b) - F(a) = g(b) - g(a).$$
□

Le funzioni $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tali che $g' = f$ si dicono <u>primitive</u> della funzione f. Se g è una primitiva di f, anche $g + \text{cost}$ lo è.
Viceversa, due primitive di f differiscono per una costante, dato che la loro differenza ha derivata nulla.
Se f è continua, una sua primitiva è la funzione
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
In effetti, F è l'unica primitiva che si annula in a.

Oss Con il simbolo $\int f(x)\,dx$ (integrale indefinito) si indica una generica primitiva di f.

Il punto 3) del teorema fondamentale del calcolo integrale riduce il calcolo degli integrali alla ricerca di primitive.

Esempi 1) La funzione $f(x) = x$ ha per primitiva la funzione $g(x) = \frac{1}{2}x^2$. Quindi

$$\int_a^b x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$$

La notazione $[g(x)]_a^b$ indica la differenza $g(b) - g(a)$.

2) $$\int_a^b x^n\,dx = \int_a^b D\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_a^b$$
$$= \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

3) Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, una primitiva della funzione $x \mapsto x^\alpha$, $x > 0$, è la funzione
$$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$$

4) Una primitiva di $x \mapsto \frac{1}{x}$ è $x \mapsto \log|x|$

5) Una primitiva di e^x è e^x

6) Una primitiva di $\sin x$ è $-\cos x$

7) Una primitiva di $\cos x$ è $\sin x$.

Integrazione per parti

Siano $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili, con derivate continue $F' = f$ e $G' = g$. Allora

$$D(FG) = F'G + FG' = fG + Fg$$

Integrando tra a e b

$$\int_a^b D(FG)(x)\,dx = \int_a^b \left(f(x)G(x) + F(x)g(x)\right) dx$$

$$\| $$

$$[FG]_a^b = F(b)G(b) - F(a)G(a)$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,G(x)\,dx = [FG]_a^b - \int_a^b F(x)\,g(x)\,dx}$$

Es Calcolare $\int_0^\pi x \sin x \, dx$

Posto $G(x) = x$ e $f(x) = \sin x$, scelgo $F(x) = -\cos x$
Allora $F'(x) = \sin x = f(x)$, $G'(x) = 1 =: g(x)$

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx = \left[-x\cos x\right]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)\,dx$$

$$= -\pi\cos\pi + 0\cdot\cos 0 + \int_0^\pi \cos x\,dx$$

$$= \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi + \sin\pi - \sin 0 = \pi$$

Es Calcolare $\int_1^x \log t \, dt$

$$\int_1^x \log t \, dt = \int_1^x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ha primitiva } t}}{1} \cdot \log t \, dt = \Big[t \log t \Big]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t} \, dt$$

$$= x \log x - 1 \cdot \log 1 - \int_1^x 1 \, dt = x \log x - x + 1$$

Quindi una primitiva di $\log x$ è $x \mapsto x \log x - x$.

Formula di cambio di variabile

Siano F e φ funzioni derivabili con derivata continua. Allora

$$D(F \circ \varphi)(x) = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$$

dove $f := F'$. Quindi

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_a^b D(F \circ \varphi)(x)\,dx =$$

$$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} F'(y)\,dy = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy$$

Perciò:

$$\boxed{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx}$$

Nel caso in cui $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ sia bigettiva, questa formula corrisponde al cambio di variabile $y = \varphi(x)$. Si osservi che dy diventa $\varphi'(x)\,dx$. La formula però vale anche senza assumere φ bigettiva.