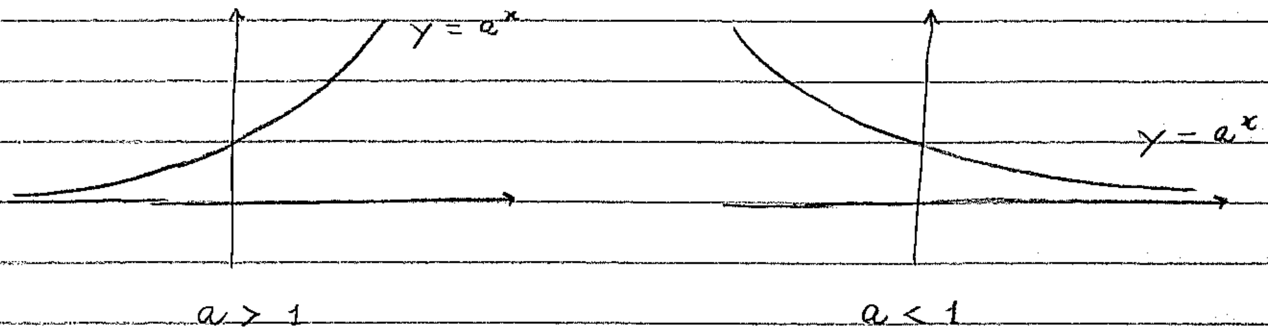
10.11.2011

Esponenziali di base qualsiasi

Sia $a > 0$. Dati $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$, risulta

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{(e^{\log a})^p} = \sqrt[q]{e^{p \log a}} = e^{\frac{p}{q} \log a}$$

Questo suggerisce la definizione $a^x := e^{x \log a}$ $\forall x \in \mathbb{R}$



Es. Determinare $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{x \log a} - 1}{x} = \log a \, \frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a}$$

Se $x \to 0$ anche $y := x \log a \to 0$. Quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \log a \, \frac{e^y - 1}{y} = \log a$$

- La funzione inversa di a^x si dice logaritmo in base a e si indica con $\log_a$.
  Oltre al logaritmo naturale ($a = e$), basi che si usano spesso sono $a = 2$ e $a = 10$.

$$a^{\log_a x} = x \iff e^{\log a \log_a x} = e^{\log x}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\log_a x = \frac{\log x}{\log a}}$$

Es Sia $a > 0$, $a \neq 1$. Determinare

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log_a x}{x - 1}$$

$$\frac{\log_a x}{x-1} = \frac{1}{\log a} \frac{\log x}{x-1} \longrightarrow \frac{1}{\log a} \quad \text{per } x \to 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log_a x}{x - 1} = \frac{1}{\log a}$$

Es La sensazione sonora, misurata in dB (decibel) è data da

$$S = 10 \cdot \log_{10} (10^{12} I)$$

dove I è l'intensità del suono, espressa in watt/m²

Calcolare la sensazione sonora in

a) conversazione ordinaria : $I = 10^{-8}$ w/m²

b) conversazione ad alta voce : $I = 10^{-6}$ w/m²

c) traffico diurno : $I = 10^{-4}$ w/m²

a) $S = 10 \log_{10} (10^{12} \cdot 10^{-8}) = 10 \cdot \log_{10} 10^4 = 40$ dB

b) $S = 10 \cdot \log_{10} (10^{12} \cdot 10^{-6}) = 10 \cdot \log_{10} 10^6 = 60$ dB

c) $S = 10 \cdot \log_{10} (10^{12} \cdot 10^{-4}) = 10 \cdot \log_{10} 10^8 = 80$ dB

Es Calcolare il rapporto tra l'intensità di un urlo a 80 dB e di un bisbiglio a 20 dB.

$$80 = 10 \cdot \log_{10} (10^{12} \cdot I_{urlo})$$
$$20 = 10 \cdot \log_{10} (10^{12} \cdot I_{bisbiglio})$$

$$\Rightarrow 60 = 10 \log_{10} \frac{I_{urlo}}{I_{bisbiglio}} \Rightarrow 6 = \log_{10} \frac{I_{urlo}}{I_{bisbiglio}}$$

$$\Rightarrow \frac{I_{urlo}}{I_{bisbiglio}} = 10^6 = 1\,000\,000 \quad \text{un milione}$$

Es Determinare i limiti

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to0+}\frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to0-}\frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

Dato che l'esponenziale è una funzione continua,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \to e^1 = e \quad \text{per } x\to+\infty$$
$$\text{e per } x\to-\infty$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^k} = +\infty \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

"L'esponenziale cresce più rapidamente di tutte le potenze."

Sappiamo che $e^x \geq 1+x \quad \forall x\in\mathbb{R}$. Allora $\forall x\geq 0$

$$e^x = e^{\frac{x}{k+1}\cdot(k+1)} = \left(e^{\frac{x}{k+1}}\right)^{k+1} \geq \left(1+\frac{x}{k+1}\right)^{k+1} \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{e^x}{x^k} \geq \frac{1}{(k+1)^{k+1}}\,\frac{x^{k+1}}{x^k} = \frac{1}{(k+1)^{k+1}}\,x \longrightarrow +\infty \quad \text{per } x\to+\infty$$

- $$\lim_{x\to+\infty} x^k e^{-x} = 0 \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

Infatti

$$x^k e^{-x} = \frac{x^k}{e^x} = \Bigg(\underbrace{\frac{e^x}{x^k}}_{\to+\infty}\Bigg)^{-1} \longrightarrow 0$$

Notazione di Landau

Def.ne Diciamo che $f = O(g)$ per $x \to x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (si legge "f è O-grande di g") se $\exists C \in \mathbb{R}$ tale che

$$|f(x)| \leq C\,|g(x)|$$

per ogni x in un intorno di x_0, tranne al più in x_0.

Def.ne Diciamo che $f = o(g)$ per $x \to x_0$ (si legge "f è o-piccolo di g") se

$$f(x) = \omega(x)\, g(x)$$

con $\omega(x)$ infinitesimo per $x \to x_0$.

Risulta $f = o(g) \implies f = O(g)$

Oss Se $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0, tranne al più in x_0, $f = o(g)$ per $x \to x_0$ è equivalente a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Si usano le stesse notazioni anche per le successioni.

Esempi

1) Dire $a_n = o(1)$ è equivalente a dire che (a_n) è infinitesima.
   Dire $a_n = O(1)$ è equivalente da dire che (a_n) è limitata.

2) $x^k = o(e^x)$ per $x \to +\infty$
   $e^{-x} = o(x^{-k})$ per $x \to$

3) $e^x = 1 + x + o(x)$ per $x \to 0$

4) Se $F_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ è la successione di Fibonacci, allora:

$$F_n = O\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \qquad F_n = o(2^n)$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = O(F_n)$$

<u>Esercizio</u> (Versione debole della formula di Stirling)
Mostrare che

$$\sqrt[n]{n!} = \frac{n}{e} + o(n) \qquad \text{per } n \to \infty$$

La tesi equivale a $\dfrac{\sqrt[n]{n!} - n/e}{n} \to 0$ ossia a $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \dfrac{1}{e}$.

Ricordiamo che se $a_n > 0$ soddisfa $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to L$, allora $\sqrt[n]{a_n} \to L$ (Esercizio 6 del 6.10.2011).

Dato che $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$, cerchiamo di applicare questo fatto a $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\downarrow \; e^{-1}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1}}_{\downarrow \; 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e} \qquad \square$$