11.10.2011

Funzioni monotòne

Defn Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora f si dice:

crescente se $x, y \in A$, $x < y \implies f(x) \leq f(y)$

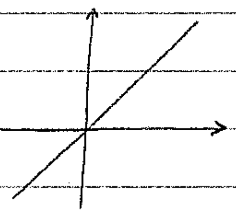
strettamente crescente se $x, y \in A$, $x < y \implies f(x) < f(y)$

decrescente se $x, y \in A$, $x < y \implies f(x) \geq f(y)$

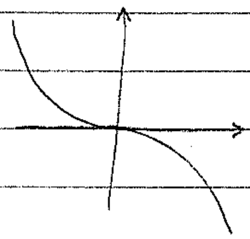
strettamente decrescente se $x, y \in A$, $x < y \implies f(x) > f(y)$

Una funzione che sia crescente oppure decrescente si dice anche monotòna. Una funzione che sia strettamente crescente oppure strettamente decrescente si dice anche strettamente monotona.

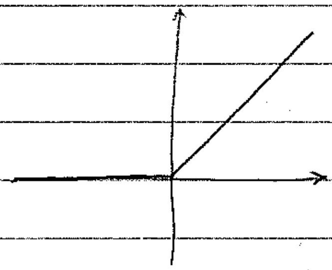
Esempi



$f(x) = x$ è strettamente crescente



$g(x) = -x^3$ è stret. decrescente



$h(x) = \max\{x, 0\}$ è crescente

Successioni monotone

Nel caso particolare di una successione, ossia di una funzione $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, la monotonia si può esprimere così:

(a_n) crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(a_n) strettamente crescente se $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(a_n) decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(a_n) strettamente decrescente se $a_n > a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Le successioni monotone hanno sempre limite (finito oppure infinito), come mostra il seguente:

<u>Teorema</u> Sia (a_n) una successione crescente. Allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

In particolare, se (a_n) è anche limitata superiormente allora converge, mentre se non lo è diverge a $+\infty$.
Un risultato analogo vale per le successioni decrescenti: tendono all'inf.

<u>dim</u> Sia $L = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \,]-\infty, +\infty]$.

<u>Caso $L < +\infty$</u> Sappiamo che $a_n \leq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Sia $\varepsilon > 0$. Per la definizione di sup, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_0} > L - \varepsilon$. Ma per $n \geq n_0$ si ha $a_n \geq a_{n_0}$ poiché (a_n) è crescente. Dunque $a_n \geq a_{n_0} > L - \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.
Concludiamo che

$$L - \varepsilon < a_n \leq L, \quad \forall n \geq n_0,$$

perciò (a_n) converge a L.

<u>Caso $L = +\infty$</u> Sia $M \in \mathbb{R}$. Per la definizione di sup, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_0} > M$. Ma per $n \geq n_0$ si ha $a_n \geq a_{n_0}$ poiché (a_n) è crescente. Dunque

$$a_n > M \quad \forall n \geq n_0,$$

perciò (a_n) diverge a $+\infty$. □

Intorni e punti di accumulazione

Defn Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Un intorno di x_0 è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che contiene un intervallo aperto contenente x_0. Dunque U intorno di $x_0 \iff]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset U$ per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo.

Defn Sia $A \subset \mathbb{R}$. Un numero $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice punto di accumulazione per A se ogni intorno di x_0 contiene punti di A diversi da x_0:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (A \setminus \{x_0\}) \cap]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\neq \emptyset \qquad (*)$$

- x_0 è di accumulazione per A se e solamente se $\exists (a_n)$, $a_n \in A$, $a_n \neq x_0$ $\forall n$ tale che $a_n \to x_0$.

dim $\Rightarrow$) Scegliendo $\varepsilon = 2^{-n}$ in $(*)$, trovo $a_n \in A \setminus \{x_0\}$ tale che $x_0 - 2^{-n} < a_n < x_0 + 2^{-n}$. Per confronto $a_n \to x_0$.
$\Leftarrow$) Se (a_n) soddisfa le condizioni richieste e $\varepsilon > 0$, dal fatto che $a_n \to x_0$ ricaviamo che

$$x_0 - \varepsilon < a_n < x_0 + \varepsilon \qquad \text{definitivamente}$$

Dato che $a_n \neq x_0$ $\forall n$, $(*)$ vale. $\square$

Oss Un punto di accumulazione può appartenere o meno a un insieme: 0 è punto di accumulazione di $[-1,1]$, di $]0,1]$, di $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$.

Es Sia A limitato superiormente ma privo di massimo. Mostrare che $\sup A$ è punto di accumulazione per A. Esibire un esempio dove A possiede max e $\sup A$ non è punto di accumulazione.

Limiti di funzioni

Def. Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione per A.
Diciamo che $f(x)$ converge a $L \in \mathbb{R}$ per x che tende a x_0, in formula $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \left.\begin{array}{l} x \in A \\ x \neq x_0 \\ |x - x_0| < \delta \end{array}\right\} \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Equivalentemente: se per ogni intorno V di L esiste un intorno U di x_0 tale che $f((U \cap A) \setminus \{x_0\}) \subset V$.
(si prenda $V =]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$ e $U =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$)

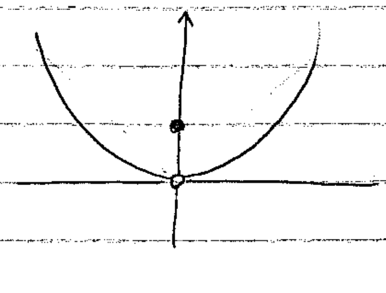
Diciamo che $f(x)$ diverge a $+\infty$ per x che tende a x_0, in formula $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \left.\begin{array}{l} x \in A \\ x \neq x_0 \\ |x - x_0| < \delta \end{array}\right\} \implies f(x) > M.$$

Analogamente $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Esempi

1) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
soddisfa $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

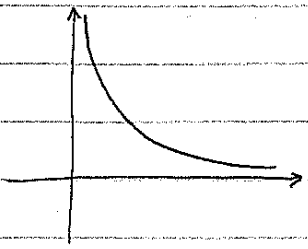


Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, scegliendo $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ si ha:

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x \neq 0 \\ |x - 0| < \delta \end{array}\right\} \implies f(x) = x^2 \quad \text{da cui}$$

$$|f(x) - 0| = |x^2 - 0| = |x^2| < \delta^2 = \varepsilon$$

2) La funzione $f: \,]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ soddisfa $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$



Infatti, fissato $M > 0$, scegliendo $\delta = \frac{1}{M}$ si ha

$$\left.\begin{array}{l} x \in \,]0,+\infty[\\ x \neq 0 \\ |x - 0| < \delta \end{array}\right\} \iff 0 < x < \frac{1}{M}$$

$$\implies f(x) = \frac{1}{x} > M$$

<u>Defn</u> Siano $A \subset \mathbb{R}$ un insieme illimitato superiormente e $f: A \to \mathbb{R}$.
Diciamo che $f(x)$ converge a $L \in \mathbb{R}$ per x che tende a $+\infty$, in formula $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R \in \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \left.\begin{array}{l} x \in A \\ x > R \end{array}\right\} \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Diciamo che $f(x)$ converge a $+\infty$ per x che tende a $+\infty$, in formula $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, se

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists R \in \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \left.\begin{array}{l} x \in A \\ x > R \end{array}\right\} \implies f(x) > M$$

Analogamente si definiscono
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

<u>Oss</u> I limiti di successioni sono casi particolari di limiti per $x \to +\infty$.

Esempio $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Infatti $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$. Fissato $\varepsilon > 0$, pongo $R = \frac{1}{\varepsilon}$.

$$\left.\begin{array}{l} x \in]0,+\infty[\\ x > R \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - 1| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{R} = \varepsilon$$

Prop Siano $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Allora i seguenti fatti sono equivalenti:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

2) per ogni successione (a_n) tale che $a_n \neq x_0$ e $a_n \to x_0$, risulta $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = L$.

dim

Supponiamo per semplicità $x_0 \in \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$ (gli altri casi sono analoghi).

1) $\Rightarrow$ 2). Fisso $\varepsilon > 0$. Per (1), $\exists \delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ e $x \neq x_0$ allora $|f(x) - L| < \varepsilon$. Sia ora (a_n) una successione che converge a x_0, con $a_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Definitivamente si ha $|a_n - x_0| < \delta$. Ma allora, $|f(a_n) - L| < \varepsilon$, sempre definitivamente. Questo mostra che $f(a_n) \to L$.

2) $\Rightarrow$ 1) Supponiamo per assurdo che 1) non valga.
Negando (1) si trova (vedi la definizione di limite):

$\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\forall \delta > 0$ $\exists x$ con $|x - x_0| < \delta$ e $x \neq x_0$ tale che $|f(x) - L| \geq \varepsilon$.

Applicando questo fatto a $\delta = 1/n$, $n \geq 1$, troviamo x_n con $|x_n - x_0| < 1/n$ e $x_n \neq x_0$ e $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$.
Ma allora $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ e per 2) $f(x_n)$ dovrebbe tendere a L, che è impossibile visto che $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$ ↯

$\square$

Le seguenti proprietà dei limiti di funzioni, analoghe a quelle dei limiti di successioni, si dimostrano in modo simile, oppure si deducono applicando la proposizione precedente.

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per A

- (Permanenza del segno) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in]0, +\infty]$, allora esiste $\delta > 0$ tale che
$$f(x) > 0 \quad \forall x \in A \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \; x \neq x_0$$

- (Confronto) Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ per ogni x in un intorno di x_0, salvo al più in x_0, e se
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L,$$
allora anche $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$.

- Se $f(x) \to L$, $g(x) \to M$ per $x \to x_0$, allora
$$f(x) + g(x) \to L + M \quad \text{per } x \to x_0$$
$$f(x) \cdot g(x) \to L \cdot M \quad \text{per } x \to x_0$$

- Se $f(x) \to L$, $g(x) \to M \neq 0$ per $x \to x_0$, allora
$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{L}{M} \quad \text{per } x \to x_0$$

Analoghe proprietà valgono quando $x_0 = -\infty$ o $x_0 = +\infty$.
Le stesse proprietà algebriche delle successioni divergenti valgono per funzioni che tendono a $+\infty$ o $-\infty$ per $x \to x_0$.