12.3.2012

Serie di numeri reali

Una serie è una somma infinita di numeri reali:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Più precisamente, diciamo che la serie definita dalla successione (a_n) converge se esiste finito il limite delle somme parziali:

$$S_k := \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n$$

Il valore di questo limite si dice somma della serie e si indica con

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Quando la successione delle somme parziali (S_k) tende a $+\infty$ (oppure a $-\infty$) diciamo che la serie diverge (oppure diverge a $-\infty$). Quando (S_k) non ha limite diciamo che la serie è indeterminata.

Esempi (Tutti importanti)

1) Vogliamo studiare il comportamento della serie geometrica di ragione x

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Si ha $S_k = \sum_{n=0}^{k} x^n = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{k+1}}{1 - x} & \text{se } x \neq 1 \\ k+1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

Quando $|x| < 1$, risulta $x^{k+1} \to 0$, da cui $S_k \to \dfrac{1}{1-x}$, dunque la serie converge e

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Quando $x \geq 1$, risulta $S_k \to +\infty$, quindi la serie diverge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = +\infty$$

Quando $x \leq -1$, la successione (S_k) non ha limite, dunque la serie è indeterminata.

Riassumendo:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n \begin{cases} = \dfrac{1}{1-x} & \text{se } |x| < 1 \\ = +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}}$$

2) Consideriamo la <u>serie armonica</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Risulta

$$S_{2^k} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2^k}}_{\geq \frac{1}{2}} \geq 1 + k \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow +\infty \quad \text{per } k \to \infty$$

Essendo anche (S_k) crescente, deduciamo che la serie armonica diverge:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty}$$

3) Consideriamo la serie di Mengoli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Dato che $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, la somma parziale k-esima vale:

$$S_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) +$$

$$+ \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}$$

Dunque $S_k \to 1$ per $k \to \infty$, perciò la serie di Mengoli converge e

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1}$$

Una serie per le cui somme parziali si verifica il fenomeno di cancellazione visto sopra si dice <u>telescopica</u>. Più precisamente, si tratta di serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ dove l'n-esimo termine ha la forma

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

In questo caso $S_k = b_0 - b_{k+1}$ e se (b_k) è infinitesima, allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_0$$

- <u>Condizione necessaria banale affinché una serie converga</u>

Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora la successione (a_n) è infinitesima.

Infatti, se $S_k \to S \in \mathbb{R}$, allora $(S_k - S_{k-1})$ è infinitesima. Ma $S_k - S_{k-1} = a_k$.

- Il comportamento di una serie non cambia se se ne modificano un numero finito di termini:

se $a_n' = a_n \ \forall n \geq n_0$ allora, dette
$S_k = \sum_{0 \leq n \leq k} a_n$ e $S_k' = \sum_{0 \leq n \leq k} a_n'$ le due

somme parziali, si ha per $k > n_0$

$$S_k' = \sum_{0 \leq n < n_0} a_n' + \sum_{n_0 \leq n \leq k} a_n' = \sum_{0 \leq n < n_0} a_n' + \sum_{n_0 \leq n \leq k} a_n =$$

$$= \sum_{0 \leq n < n_0} a_n' + S_k - \sum_{0 \leq n < n_0} a_n$$

Perciò S_k' e S_k differiscono per la costante $\sum_{0 \leq n < n_0} (a_n' - a_n)$ e dunque hanno comportamento analogo per $k \to \infty$.

Serie a termini positivi

Consideriamo una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Allora la successione delle somme parziali $S_K = \sum_{n=0}^{K} a_n$ è monotona crescente.
Come tale ha sempre limite, che può essere finito o infinito. Nel primo caso la serie converge, nel secondo diverge. In ogni caso, l'espressione $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ha senso, come elemento di $[0, +\infty]$.
Per decidere quale delle due eventualità si verifichi è spesso utile confrontare la serie data con una nota:

<u>Confronto</u>: Se $0 \leq a_n \leq b_n$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Questo segue dal fatto che la stessa disuguaglianza sussiste tra le somme parziali e che le disuguaglianze passano al limite (Carabinieri).

Quindi se $\sum b_n$ converge, anche $\sum a_n$ converge, mentre se $\sum a_n$ diverge, anche $\sum b_n$ diverge.

<u>Oss</u> Grazie a quanto osservato prima, i due fatti sopra valgono anche assumendo che $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni $n \geq n_0$.

<u>Esempi</u>

1) Dato che $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 1$, dal fatto che

la serie armonica diverge deduciamo che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$.

Più in generale $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty \quad \text{se } \alpha \leq 1}$

2) $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$. Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2$ (è la serie di Mengoli moltiplicata per 2) deduciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge e che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$$

<u>Oss</u> Si può dimostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Dato che $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$ per $\alpha \geq 2$, deduciamo che

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \qquad \text{se } \alpha \geq 2}$$

Resta da capire il comportamento di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ per $1 < \alpha < 2$

Vedremo più avanti (usando la teoria dell'integrazione) che in questo caso la serie <u>converge</u>.