13.3.2012

Esercizi sulle serie

1) Esprimere il numero $14,8\overline{61} = 14,86161616161\ldots$ in forma di frazione.

La regola studiata alla scuola media fornisce il risultato seguente:

$$14,8\overline{61} = \frac{14861 - 148}{990} \left(= \frac{14717}{990} \right)$$

Controlliamo se è vero:

$$14,8\overline{61} = 14 + 8 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{10^2} + 1 \cdot \frac{1}{10^3} + 6 \cdot \frac{1}{10^4} + 1 \cdot \frac{1}{10^5} + \ldots$$

$$= 14 + 8 \cdot \frac{1}{10} + 61 \left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^7} + \frac{1}{10^9} + \ldots \right)$$

$$= 14 + 8 \cdot \frac{1}{10} + \frac{61}{10^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100} \right)^n =$$

$$= 14 + 8 \cdot \frac{1}{10} + \frac{61}{10^3} \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} =$$

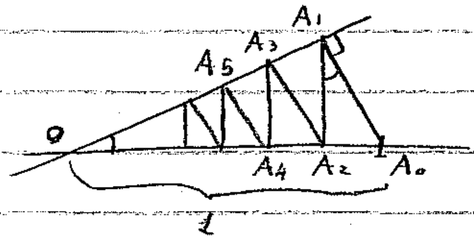
$$= 14 + 8 \cdot \frac{1}{10} + \frac{61}{10^3} \frac{10^2}{99} = 14 + 8 \cdot \frac{1}{10} + \frac{61}{990}$$

$$= 148 \cdot \frac{1}{10} + \frac{61}{990} = \frac{148 \cdot 99 + 61}{990}$$

$$= \frac{148 \cdot 100 + 61 - 148}{990} = \frac{14861 - 148}{990}$$

come previsto.

2) Dato un angolo di ampiezza $30° = \frac{\pi}{6}$, calcolare la lunghezza della spezzata disegnata sotto.



$A_0A_1 = OA_0 \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} OA_0 = \frac{1}{2}$

$OA_1 = OA_0 \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} OA_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A_2 è ottenuto da A_1 esattamente come A_1 è ottenuto da A_0. Quindi

$A_1A_2 = OA_1 \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

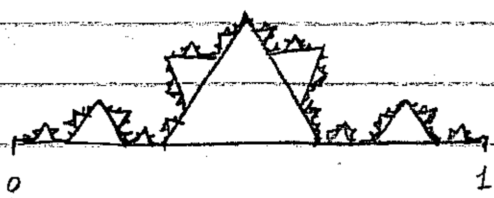
$OA_2 = OA_1 \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

Iterando, trovo $A_nA_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

Lunghezza spezzata $= \sum_{n=0}^{\infty} A_nA_{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n =$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

3) Calcolare la lunghezza della curva di von Koch:



Al passo 0 abbiamo un segmento lungo $L_0 = 1$.
Al passo 1 sostituiamo il terzo centrale con 2 segmenti lunghi $\frac{1}{3}$:

$$L_1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Al passo 2 facciamo lo stesso sui 4 lati: di nuovo la lunghezza aumenta di un fattore $\frac{4}{3}$:

$$L_2 = \frac{4}{3} L_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

In generale, $L_n = \frac{4}{3} L_{n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 L_{n-2} = \dots = \left(\frac{4}{3}\right)^n L_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

Quindi la lunghezza totale della curva di von Koch è

$$\lim_{n \to \infty} L_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty \quad \text{lunghezza infinita}$$

4) Determinare l'area della regione racchiusa dalla curva ottenuta costruendo su ogni lato di un triangolo equilatero di lato 1 una curva di von Koch.

$$A_0 = \frac{1}{2} 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

A_1 è ottenuto da A_0 sommando 3 triangoli di area $\frac{1}{9} A_0$. Quindi $A_1 = A_0 + \frac{1}{3} A_0 = A_0\left(1 + \frac{1}{3}\right)$

A_2 è ottenuto da A_1 sommando $4 \cdot 3 = 12$ triangoli di area $\frac{1}{3^4}A_0$. Quindi

$$A_2 = A_1 + \frac{4}{3^3}A_0 = A_0\left(1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}\right)$$

A_3 è ottenuto da A_2 sommando $4^2 \cdot 3$ triangoli di area $\frac{1}{3^6}A_0$. Quindi

$$A_3 = A_2 + \frac{4^2}{3^5}A_0 = A_0\left(1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}+\frac{4^2}{3^5}\right)$$

Ogni volta il numero dei triangoli da aggiungere viene moltiplicato per 4, mentre la loro area viene riscalata di un fattore $\frac{1}{9}$

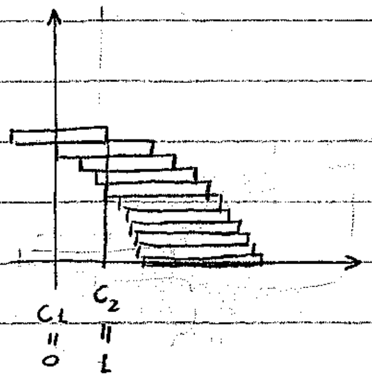
$$\text{Area totale} = A_0\left(1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{4}{9}+\frac{4^2}{9^2}+\frac{4^3}{9^3}+\dots\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\,\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\,\frac{9}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{8\sqrt{3}}{20} = \frac{2}{5}\sqrt{3}$$

5) Si vogliono impilare n monete di raggio 1 come in figura, in modo che l'ultima abbia distanza massima dalla prima, ma conservando l'equilibrio.

Quanto lontano si può arrivare disponendo di un numero n arbitrariamente grande di monete?



Indichiamo con c_j l'ascissa del centro della j-esima moneta partendo dall'alto.
Possiamo assumere $c_1 = 0$.
c_1 è anche l'ascissa del baricentro della prima moneta.
Affinché questa non cada, è necessario che questo baricentro giaccia sopra la seconda moneta. Volendo spostare questa il più possibile a destra si trova $c_2 = 1$

Il sistema formato dalle due monete più in alto ha baricentro $\frac{c_1+c_2}{2} = \frac{1}{2}$, quindi il centro della terza moneta può essere spinto a destra fino a $c_3 = 1 + \frac{1}{2}$

Il sistema formato dalle 3 monete più in alto ha baricentro di ascissa

$$\frac{c_1+c_2+c_3}{3} = \frac{1+1+1/2}{3} = \frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

quindi il centro della quarta moneta può avere ascissa

$$c_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

Questo suggerisce che se il centro della k-esima moneta ha ascissa $c_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}$, allora il sistema è in equilibrio.
Per verificarlo, dobbiamo mostrare che con queste scelte il baricentro delle prime k monete cade esattamente sul bordo sinistro della $(k+1)$-esima.

Ascissa baricentro prime k monete $= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} c_j =$

$$= \frac{1}{k} \sum_{j=2}^{k} \sum_{h=1}^{j-1} \frac{1}{h} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{h=1}^{i} \frac{1}{h} = \frac{1}{k} \sum_{\underbrace{1 \leq h \leq i}_{k-h \text{ indici } i \text{ in questo intervallo}} \leq k-1} \frac{1}{h} =$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{1 \le h \le k-1} \frac{k-h}{h} = \sum_{h=1}^{k-1} \frac{1}{h} - \frac{k-1}{k} = \sum_{h=1}^{k-1} \frac{1}{h} - 1 + \frac{1}{k}$$

$$= \sum_{h=1}^{k} \frac{1}{h} - 1 = c_{k+1} - 1$$

Quindi l'ascissa di questo baricentro coincide con il bordo sinistro della $(k+1)$-esima moneta.

Criteri di convergenza che seguono dal confronto con serie geometriche.

Criterio della radice n-esima. Sia $a_n \geq 0$ $\forall n$. Se esiste $\lambda < 1$ tale che $\sqrt[n]{a_n} \leq \lambda$ definitivamente, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

dim. Elevando alla n, si ha che definitivamente $a_n \leq \lambda^n$. Quindi gli a_n sono definitivamente maggiorati dall'n-esimo termine di una serie geometrica che, essendo $0 \leq \lambda < 1$ converge. Per confronto, deduciamo che anche la serie degli a_n converge. $\square$

Applicazione. Sia $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che esiste il limite

$$L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Se $L < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
Se $L > 1$, la serie diverge.

Infatti se $L < 1$, possiamo scegliere $L < \lambda < 1$ e troviamo che $\sqrt[n]{a_n} < \lambda$ definitivamente, quindi si ha la convergenza per quanto visto sopra.

Se $L > 1$, allora in particolare $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ definitivamente, da cui $a_n \geq 1$ definitivamente e la serie a termini positivi $\sum a_n$ diverge poiché (a_n) non è infinitesima.

<u>Criterio del rapporto</u> Sia $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Se esiste $\lambda < 1$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda$ definitivamente, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

<u>dim</u> Per ipotesi $a_{n+1} \leq \lambda a_n$ $\forall n \geq n_0$. Ma allora, per $n > n_0$:

$$a_n \leq \lambda a_{n-1} \leq \lambda^2 a_{n-2} \leq \dots \leq \lambda^{n-n_0} a_{n_0} = c\lambda^n$$

con $c = a_{n_0} \lambda^{-n_0}$.

Dato che $0 < \lambda < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} c\lambda^n = c\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ converge e per confronto converge anche la serie data. □

<u>Applicazione</u> Sia $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che esiste il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Se $L < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
Se $L > 1$, la serie diverge.

Infatti, se $L < 1$ scegliamo $L < \lambda < 1$ e risulta $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda$ definitivamente.
Invece se $L > 1$ allora in particolare $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, da cui $a_{n+1} \geq a_n$. Perciò a_n è definitivamente crescente ed essendo > 0 non può essere infinitesima. Perciò la serie diverge.

Esempi

1) Dire se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ converge.

Trattandosi di una serie a termini positivi, $a_n = \frac{n^2}{n!}$, possiamo studiare il rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n+1} = o(1)$$

Perciò $L = 0$ e la serie converge per il criterio del rapporto.
Il criterio della radice n-esima avrebbe permesso di raggiungere la stessa conclusione.

2) Sappiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Però $\sqrt[n]{1/n^2} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \to 1$ e $\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$

quindi la convergenza di questa serie non è deducibile né dal criterio della radice n-esima né da quello del rapporto.

Dunque questi 2 criteri sono condizioni sufficienti ma non necessarie per la convergenza (cosa del resto ovvia dalla loro dimostrazione: una serie può convergere anche se il suo termine generale non è maggiorato da una progressione geometrica di ragione $\lambda < 1$).