13.10.2011

Limiti di successioni definite per ricorrenza

Es 1 Determinare, se esiste, il limite della successione (x_n) definita da

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

Risulta $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Inoltre $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} > x_n$, perciò (x_n) è (strettamente) crescente.
Come tale, possiede limite $L \in]0, +\infty]$ (il fatto che $L > 0$ segue da $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$).
Se fosse $L \neq +\infty$, passando al limite nell'identità

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$$

troveremmo

$$L = L + \frac{1}{L}$$

che è equivalente a $\frac{1}{L} = 0$, che non ha soluzione.
Quindi $L = +\infty$.

Es 2 Determinare, se esiste, il limite della successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

E' una legge della forma $a_{n+1} = f(a_n)$, con

$$f(x) = \sqrt{2+x}.$$

Inoltre $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, quindi ci basta studiare f su $[0, +\infty[$. Vediamo per quali $x \geq 0$ risulta $f(x) > x$:

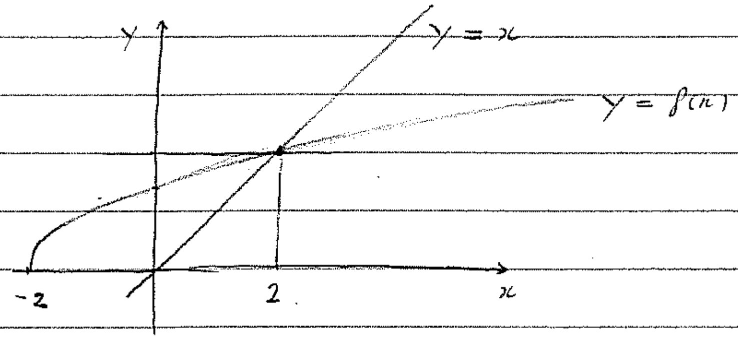
$\sqrt{2+x} > x \iff 2 + x > x^2 \iff x^2 - x - 2 < 0$

$\iff (x+1)(x-2) < 0 \iff -1 < x < 2$

Ma essendo $x \geq 0$, troviamo $0 \leq x < 2$.

Concludiamo che 1) $f(x) > x$ per $x \in [0,2[$
2) $f(x) = x$ per $x = 2$
3) $f(x) < x$ per $x \in]2,+\infty[$

Ecco un grafico approssimativo di f:



f è una funzione strett. cresc. Dimostriamo per induzione il seguente enunciato:

$\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n < 2$ e, se $n \geq 1$, $a_n > a_{n-1}$

Per $n=0$ occorre solo verificare $a_0 < 2$, che è vero poiché $a_0 = 0$.

Supponiamo l'enunciato vero per n. Dato che $0 \leq a_n < 2$ risulta

$a_{n+1} = f(a_n) < f(2) = 2$ poiché f è strett. cresc.

$a_{n+1} = f(a_n) > a_n$ per 1)

Il passo induttivo è dimostrato.

Dunque (a_n) è strettamente crescente e limitata superiormente da 2. Come tale, converge ad un limite L che, essendo inoltre $a_n \geq 0$, sta in $[0,2]$.

Passando al limite nell'equazione

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

troviamo $L = \sqrt{2+L} \iff L^2 = 2 + L$

$\iff L^2 - L - 2 = 0 \iff (L-2)(L+1) = 0 \iff L = -1$ oppure 2

Dato che $L \geq 0$, necessariamente $L = 2$.

Concludiamo che $a_n \uparrow 2$ (tende a 2 in modo strett. cresc.)

<u>Es 3</u> 1) Dimostrare che la funzione

$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

ha un unico punto di minimo in $x = \sqrt{2}$ e vale $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

2) Si consideri la ricorsione

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

Dimostrare che se $x_0 > \sqrt{2}$ allora (x_n) è strettamente decrescente e converge a $\sqrt{2}$.

1) Per la disuguaglianza A.G.

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \geq \sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} = \sqrt{2}$$

e vale $=$ $\iff$ $x = \frac{2}{x}$ ossia $\iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$ (visto che $x > 0$). Inoltre $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

Dunque $f(x) \geq \sqrt{2} = f(\sqrt{2})$ $\forall x > 0$ e vale $=$ $\iff x = \sqrt{2}$. Questo dimostra il punto 1).

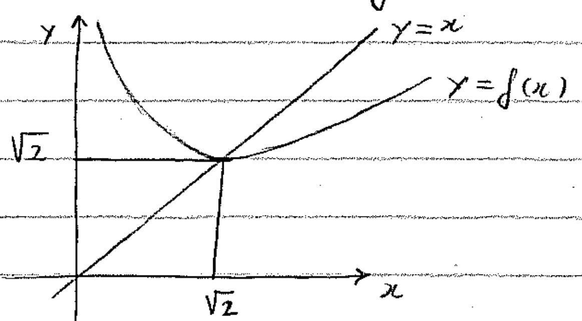
2) Studiamo per quali $x > 0$ risulta $f(x) < x$:

$$f(x) < x \iff \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) < x \iff x + \frac{2}{x} < 2x$$

$$\iff \frac{2}{x} < x \iff 2 < x^2 \iff x > \sqrt{2}$$

poiché $x > 0$

Grazie anche al punto 1), ecco un grafico approssimativo di f



$f(x) < x \quad \forall x \in]\sqrt{2}, +\infty[$

$f(x) > x \quad \forall x \in]0, \sqrt{2}[$

$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

Sia ora $x_0 > \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = f(x_n)$.

Dimostriamo per induzione:

$\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > \sqrt{2}$ e, se $n \geq 1$, $x_n < x_{n-1}$.

Per $n = 0$ OK poiché $x_0 > \sqrt{2}$. Supponiamo l'affermazione vera per n. Allora $x_n > \sqrt{2}$, da cui:

- $x_{n+1} = f(x_n) > \sqrt{2}$ poiché $\sqrt{2}$ è il minimo di f ed è realizzato solo per $x = \sqrt{2}$, ma $x_n \neq \sqrt{2}$.

- $x_{n+1} = f(x_n) < x_n$ poiché $f(x) < x$ per $x \in]\sqrt{2}, +\infty[$ e $x_n \in]\sqrt{2}, +\infty[$

L'induzione è conclusa.

Perciò x_n è strettamente decrescente e $x_n > \sqrt{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Ne segue che $x_n \downarrow L \geq \sqrt{2}$.
Passando al limite in

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

troviamo $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{2}{L}\right)$, ossia $L = f(L)$, da cui $L = \sqrt{2}$

Problema Si vogliono inviare stringhe di 0 e 1 lunghe n tramite un canale di trasmissione che non accetta 2 zeri consecutivi.
Occorre allora trasformare la stringa di partenza in una stringa valida, ossia senza coppie di zeri consecutivi, che possa essere inviata e ritrasformata dal mittente nella stringa di partenza (il mittente conosce l'algoritmo di trasformazione).
Un semplice algoritmo è: inserire un 1 dopo ciascun simbolo. Questo produce una stringa valida, che può essere ritrasformata in quella di partenza semplicemente eliminando tutti gli 1 che si trovano nelle posizioni di posto pari. Lo svantaggio di questo algoritmo è che raddoppia la lunghezza della stringa da inviare.

Esercizio (per voi) Trovare un algoritmo che abbia fattore di conversione $\frac{5}{3}$, ossia che trasformi ciascuna stringa lunga n in una lunga al più $\frac{5}{3}n$

Ci viene proposto di acquistare un algoritmo con fattore di conversione $\frac{6}{5}$. Vogliamo dimostrare che si tratta di un imbroglio: un algoritmo simile non può esistere.
Cominciamo con il risolvere un:

Problema preliminare Quante sono le stringhe valide, ossia prive di 2 zeri consecutivi, lunghe n?

Chiamiamo V_n il numero delle stringhe valide lunghe n, U_n il numero delle stringhe valide lunghe n che terminano per 1 e z_n il numero di quelle che terminano per 0. Dunque:

$$v_n = u_n + z_n \qquad \forall n \geq 1$$

A ciascuna stringa valida si può aggiungere un 1 finale e si ottiene ancora una stringa valida. Anzi, tutte le stringhe valide che terminano per 1 sono fatte così. Perciò

$$u_{n+1} = v_n \qquad \forall n \geq 1.$$

Cerchiamo una formula per v_{n+1}. Se al posto n-esimo di questa stringa c'è uno 0, allora al posto n+1-esimo possiamo mettere solamente un 1. Il numero totale delle stringhe fatte così è z_n.
Se al posto n-esimo c'è un 1, possiamo mettere sia uno 0 che un 1 al posto n+1-esimo, quindi il numero totale delle stringhe fatte così è $2u_n$. Perciò

$$v_{n+1} = z_n + 2u_n = z_n + u_n + u_n = v_n + v_{n-1} \qquad \forall n \geq 2$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato $u_{n+1} = v_n \quad \forall n \geq 1$.
Inoltre $v_1 = 2$ e $v_2 = 3$, che insieme a

$$v_{n+1} = v_n + v_{n-1} \qquad \forall n \geq 1$$

definisce (v_n) per tutti gli $n \geq 1$. Se poniamo convenzionalmente $v_0 = 1$, $v_2 = 3$ è compatibile con la regola ricorsiva. Riassumendo, il numero delle stringhe valide lunghe n è dato da

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + v_{n-1} & \forall n \geq 1 \\ v_0 = 1, \ v_1 = 2 \end{cases}$$

Si tratta della famosa <u>successione di Fibonacci</u> (o meglio di una sua shiftata: in genere Fibonacci si definisce con $v_0 = v_1 = 1$)

Vogliamo ricavare adesso un'espressione esplicita per V_n.
Cerchiamo soluzioni di

$$(*) \quad V_{n+1} = V_n + V_{n-1} \qquad \forall n \geq 1$$

della forma $V_n = t^n$, con $t \in \mathbb{R}$ da determinare.
Si trova

$$t^{n+1} = t^n + t^{n-1} \iff (\text{se } t \neq 0) \quad t^2 = t + 1$$
$$\iff t^2 - t - 1 = 0 \iff t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Se poniamo $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, abbiamo trovato che

$$V_n = \alpha^n \quad e \quad V_n = \beta^n$$

sono soluzioni di $(*)$. Nessuna delle due soluzioni trovate soddisfa però le condizioni iniziali (è la $V_1 = 2$ a fallire). Però osserviamo che:

- Se (V_n) è una soluzione di $(*)$, allora anche (cV_n) risolve $(*)$, qualunque sia $c \in \mathbb{R}$ (basta moltiplicare l'equazione $(*)$ per c).

- Se (V_n) e (W_n) sono due soluzioni di $(*)$, allora anche $(V_n + W_n)$ è soluzione di $(*)$ (basta scrivere l'equazione $(*)$ per (V_n) e per (W_n) e sommare membro a membro).

Mettendo assieme questi due fatti: se (V_n) e (W_n) sono soluzioni di $(*)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, allora $(aV_n + bW_n)$ è ancora soluzione di $(*)$.
L'espressione ↑ si dice <u>combinazione lineare</u> tra (V_n) e (W_n). Il fatto che una combinazione lineare di 2 soluzioni sia ancora una soluzione è

una caratteristica delle <u>equazioni lineari</u>, quale è (*).

Perciò

$$V_n = a\alpha^n + b\beta^n$$

con α, β definiti prima, è soluzione di (*) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$

Determiniamo a e b in modo che le condizioni iniziali siano soddisfatte:

$$\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_1 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 1 \\ a\alpha + b\beta = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a\alpha + b\alpha = \alpha \\ a\alpha + b\beta = 2 \end{cases}$$

sottraendo le 2 equazioni

$$\begin{cases} b(\alpha - \beta) = \alpha - 2 \\ a\alpha + b\beta = 2 \end{cases}$$

$$b = \frac{\alpha - 2}{\alpha - \beta} = 1 + \frac{\beta - 2}{\alpha - \beta}$$

$$a = \frac{2 - b\beta}{\alpha} = \frac{2}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\alpha - 2}{\alpha - \beta} = \frac{2\alpha - 2\beta - \beta\alpha + 2\beta}{\alpha(\alpha - \beta)} = \frac{2 - \beta}{\alpha - \beta}$$

Dato che $\alpha - \beta = \dfrac{1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$, si ha

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}}(2 - \beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{4 - 1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5} + 5}{10}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha - 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 + \sqrt{5} - 4}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{\sqrt{5} - 3}{2} = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}$$

Perciò

$$V_n = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$