13.12.2011

Criterio di stretta monotonia

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su un intervallo I.

Abbiamo visto che il teorema di Lagrange implica:

1) f crescente $\iff$ $f' \geq 0$
2) f decrescente $\iff$ $f' \leq 0$

Vogliamo caratterizzare ora la monotonia stretta.

Sia

$$Z = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$$

Allora vale

f strettamente crescente $\iff$ $f' \geq 0$ e Z non contiene intervalli di lunghezza positiva.

dim

$\Rightarrow$) $f' \geq 0$ segue da 1). Se Z contenesse un intervallo di lunghezza positiva, avendo derivata nulla f sarebbe costante su tale intervallo, contro l'ipotesi che f è strettamente crescente.

$\Leftarrow$) Per 1), f è crescente. Se la crescenza non fosse stretta, esisterebbero $x < y$ tali che f è costante su $[x,y]$. Ma allora $f' = 0$ su $[x,y]$, contro l'ipotesi che Z non contenga intervalli di lunghezza positiva. □

Analoga caratterizzazione sussiste per f strett. decresc.

Es 1 Determinare il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$x^2 = x \sin x + \cos x$$

Le soluzioni dell'equazione proposta sono esattamente gli zeri della funzione

$$f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x$$

f è derivabile e

$$f'(x) = 2x - \sin x - x \cos x + \sin x = x\,(2 - \cos x)$$

Dato che $2 - \cos x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} x$

Dunque f è strettamente decrescente su $]-\infty, 0]$ e strettamente crescente su $[0, +\infty[$.

Inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x^2 - x \sin x - \cos x\right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x^2 \underbrace{\left(1 - \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}\right)}_{\downarrow \atop 1} = +\infty$$

e analogamente:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Dato che $f(0) = -1$, dal teorema degli zeri deduciamo che f ha uno zero in $]-\infty, 0[$ e uno in $]0, +\infty[$.

Dalla stretta monotonia nei 2 intervalli, concludiamo che questi sono gli unici zeri di f.

Dunque l'equazione proposta ha 2 soluzioni.

Es 2 Dimostrare che $x - \sin x < \frac{x^3}{6}$ $\forall x > 0$.

Ponendo $f(x) = \frac{x^3}{6} - x + \sin x$, dobbiamo dimostrare che $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$.
Dato che il segno di f non è evidente, deriviamo:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1 + \cos x$$

Neanche il segno di $f'(x)$ è evidente, quindi deriviamo ancora. La derivata di f' si chiama derivata seconda di f e si indica con f'':

$$f''(x) = x - \sin x$$

Nemmeno il segno di f'' è evidente, perciò calcoliamo la derivata terza f''':

$$f'''(x) = 1 - \cos x$$

Finalmente, $f'''(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $= 0 \iff x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Dato che f''' è la derivata di f'', dal criterio di stretta monotonia deduciamo che f'' è strettamente crescente. Insieme a $f''(0) = 0$, ciò implica

$$f''(x) > 0 \quad \forall x > 0$$

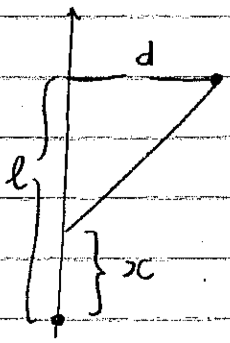
Ma allora f' è strettamente crescente in $[0, +\infty[$, ed essendo $f'(0) = 0$, si ha

$$f'(x) > 0 \quad \forall x > 0$$

Quindi f è strettamente crescente in $[0, +\infty[$

e dal fatto che $f(0) = 0$ deduciamo che $f(x) > 0$ $\forall x > 0$, come volevamo dimostrare.

Es 3 Una nave procede in linea retta a velocità V ed avvista un naufrago in un punto che dista d dalla sua retta e che è spostato in avanti di l, come in figura:



Ad un certo punto del suo percorso la nave può calare una scialuppa che si dirige verso il naufrago con velocità v.
Dove occorre calare la scialuppa affinché il tempo di salvataggio sia minimo ?

Chiamiamo x il tratto percorso dalla nave prima di calare la scialuppa. x varia in $[0, l]$.
Dato che $\text{Tempo} = \frac{\text{spazio}}{\text{velocità}}$, il tempo di salvataggio se la scialuppa è calata in x vale

$$T(x) = \underbrace{\frac{x}{V}}_{\text{nave}} + \underbrace{\frac{\sqrt{d^2 + (l-x)^2}}{v}}_{\text{scialuppa}}$$

Si tratta di determinare il minimo di T su $[0, l]$. Essendo T una funzione continua e $[0, l]$ un insieme chiuso e limitato, questo minimo esiste sicuramente (per il teorema di Weierstrass)

Dato che T è derivabile, un punto di minimo $\bar{x}$, se interno all'intervallo, è tale che $T'(\bar{x}) = 0$.
Altrimenti $\bar{x}$ può essere un estremo dell'intervallo.
Deriviamo T.

$$T'(x) = \frac{1}{V} - \frac{1}{2v}\frac{1}{\sqrt{d^2+(\ell-x)^2}}\,2(\ell-x)$$

$$= \frac{v\sqrt{d^2+(\ell-x)^2} - V(\ell-x)}{vV\sqrt{d^2+(\ell-x)^2}}$$

Quindi $T'(x) \geq 0 \iff v\sqrt{d^2+(\ell-x)^2} \geq V(\ell-x)$

$$\iff v^2\left(d^2+(\ell-x)^2\right) \geq V^2(\ell-x)^2 \iff$$

$$\iff (V^2-v^2)(\ell-x)^2 \leq v^2 d^2$$

Per $v \geq V$ questa disuguaglianza è vera $\forall x$, in senso stretto. In questo caso $T'(x) > 0$ $\forall x$, dunque T è strettamente crescente e il minimo è raggiunto per $x = 0$.

Supponiamo ora $v < V$. Allora $T'(x) \geq 0$

$$\iff (\ell-x)^2 \leq \frac{v^2d^2}{V^2-v^2} \iff \ell - x \leq \frac{vd}{\sqrt{V^2-v^2}}$$

$$\iff x \geq \ell - \frac{vd}{\sqrt{V^2-v^2}}$$

Se $\frac{vd}{\sqrt{V^2-v^2}} \geq \ell$, ossia se $d \geq \frac{\ell}{v}\sqrt{V^2-v^2}$,

si ha di nuovo $T'(x) \geq 0$ $\forall x \in [0, \ell]$ con la disuguaglianza stretta in $]0, \ell]$. In questo caso il minimo è raggiunto per $x = 0$.

Se invece $d < \frac{l}{v}\sqrt{V^2 - v^2}$, il punto

$$\bar{x} = l - \frac{vd}{\sqrt{V^2 - v^2}}$$

è interno all'intervallo $[0, l]$ e $T' < 0$ su $[0, \bar{x}[$, $T' > 0$ su $]\bar{x}, l]$. Quindi T raggiunge il minimo in $x = \bar{x}$.

In conclusione:

Se $v \geq V$ (scialuppa veloce almeno quanto la nave) oppure $v < V$ e $d \geq \frac{l}{v}\sqrt{V^2 - v^2}$ (naufrago troppo lontano dalla rotta) conviene calare immediatamente la scialuppa.

Se invece $v < V$ e $d < \frac{l}{v}\sqrt{V^2 - v^2}$, la scialuppa deve essere calata quando la nave ha percorso un tratto

$$\bar{x} = l - \frac{vd}{\sqrt{V^2 - v^2}}$$

Es 4 Discutere, al variare dei coefficienti $a, b, c \in \mathbb{R}$, il numero delle radici reali del polinomio di terzo grado

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

Cerchiamo di eliminare uno dei 4 termini con la traslazione $x = t + x_0$:

$$P(x) = (t + x_0)^3 + a(t + x_0)^2 + b(t + x_0) + c =$$

$$= t^3 + (3x_0 + a)t^2 + (3x_0^2 + 2ax_0 + b)t +$$
$$+ x_0^3 + ax_0^2 + bx_0 + c$$

Se scegliamo $x_0 = -a/3$, il polinomio assume la forma:

$$\boxed{Q(t) = t^3 - pt + q}$$

con $$p = -3x_0^2 - 2ax_0 - b = -\frac{a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} - b = \frac{a^2}{3} - b$$

$$q = x_0^3 + ax_0^2 + bx_0 + c = -\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c$$
$$= \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c$$

Ci siamo ridotti al problema, più semplice, di discutere il numero delle radici di Q in funzione di p e q.
Dato che

$$\lim_{t \to -\infty} Q(t) = -\infty \quad e \quad \lim_{t \to +\infty} Q(t) = +\infty$$

Q ha sempre almeno una radice reale. Derivando

$$Q'(x) = 3t^2 - p$$

Se $p \leq 0$, risulta $Q'(t) \geq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ e $= 0$ al più per $t = 0$. In questo caso, Q è strettamente crescente ed ha pertanto esattamente una radice reale.

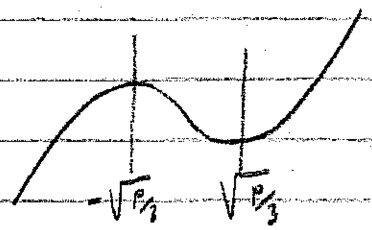
Supponiamo ora $p > 0$. Allora

$$Q'(t) > 0 \iff t < -\sqrt{p/3} \quad \text{oppure} \quad t > \sqrt{\frac{p}{3}}$$

$$Q'(t) = 0 \iff t = \pm\sqrt{p/3}$$

$$Q'(t) < 0 \iff -\sqrt{p/3} < t < \sqrt{p/3}$$

Perciò Q cresce strettamente in $]-\infty, -\sqrt{p/3}]$, assume un massimo locale in $-\sqrt{p/3}$, decresce strettamente in $[-\sqrt{p/3}, \sqrt{p/3}]$, assume un minimo locale in $\sqrt{p/3}$ e cresce strettamente in $[\sqrt{p/3}, +\infty[$:



Inoltre $Q(-\sqrt{p/3}) = q + \frac{2}{3}p\sqrt{p/3}$

$$\vee$$

$$Q(\sqrt{p/3}) = q - \frac{2}{3}p\sqrt{p/3}$$

Abbiamo esattamente 1 radice se $Q(-\sqrt{p/3}) < 0$ oppure $Q(\sqrt{p/3}) > 0$, ossia

$$q < -\frac{2}{3}p\sqrt{p/3} \quad \text{oppure} \quad q > \frac{2}{3}p\sqrt{p/3}$$

e, equivalentemente, $q^2 > \frac{4}{9}p^2 \cdot \frac{p}{3} = \frac{4}{27}p^3$

Abbiamo esattamente 3 radici se e solamente se $Q(-\sqrt{p/3}) > 0$ e $Q(\sqrt{p/3}) < 0$, ossia

$$-\frac{2}{3}p\sqrt{p/3} < q < \frac{2}{3}p\sqrt{p/3} \iff q^2 < \frac{4}{27}p^3$$

Infine, abbiamo esattamente 2 radici se e solamente se $Q(-\sqrt{p/3}) = 0$ oppure $Q(\sqrt{p/3}) = 0$, ossia

$$q = \pm \frac{2}{3} p \sqrt{\frac{p}{3}} \iff q^2 = \frac{4}{27} p^3$$

Se introduciamo la quantità $\Delta = 4p^3 - 27q^2$, possiamo riassumere tutte le casistiche in:

$\Delta > 0 \iff 3$ radici

$\Delta = 0$ & $(p,q) \neq (0,0) \iff 2$ radici

$\Delta < 0$ oppure $(p,q) = (0,0) \iff 1$ radice