14.5.2012

Integrali e serie

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ sull'intervallo $[1, n+1]$.
Consideriamo la suddivisione $p = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ dell'intervallo $[1, n]$.
Dato che f è decrescente

$$\inf_{[j,j+1]} f = f(j+1) = \frac{1}{j+1}, \quad \sup_{[j,j+1]} f = f(j) = \frac{1}{j}$$

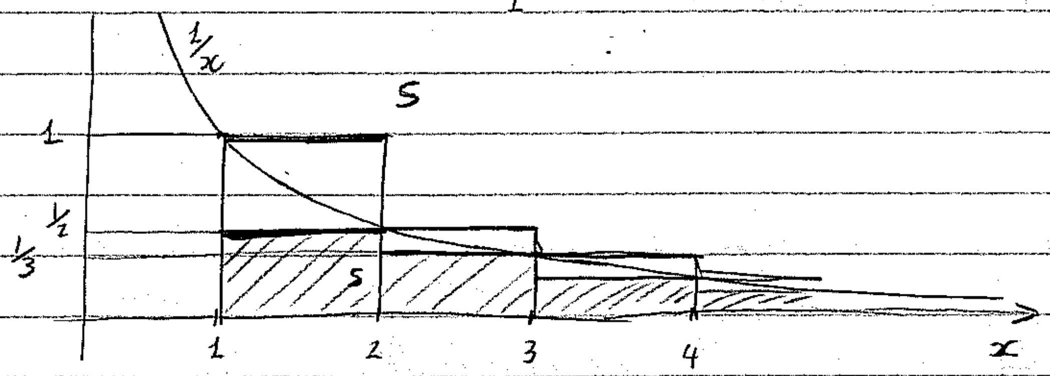
Quindi le somme di Riemann inferiore e superiore di f relative alla suddivisione p sono

$$s(f,p) = \sum_{j=1}^{n-1} \inf_{[j,j+1]} f = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j+1}$$

$$S(f,p) = \sum_{j=1}^{n-1} \sup_{[j,j+1]} f = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}.$$

Dalle disuguaglianze $s(f,p) \le \int_1^n f(x)\,dx \le S(f,p)$ deduciamo che

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j+1} \le \int_1^n \frac{1}{x}\,dx \le \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}$$



Dato che $\int_1^m \frac{1}{x}\,dx = \left[\log x\right]_1^m = \log m$, otteniamo

$$\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j+1} \overset{(1)}{\leq} \log m \overset{(2)}{\leq} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j}$$

Queste disuguaglianze ci dicono come diverge la serie armonica:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j+1} \overset{(1)}{\leq} 1 + \log m$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \overset{(2)}{\geq} \log(m+1)$$

ossia

$$\boxed{\log(m+1) \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \leq 1 + \log m}$$

Dal fatto che $\log(m+1) - \log m = \log \frac{m+1}{m} = \log(1+o(1)) = o(1)$ deduciamo che

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = \log m + O(1)}$$

Valutiamo con lo stesso metodo il comportamento della serie armonica generalizzata

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \qquad \alpha > 0$$

Sia $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ e sia p come sopra. Risulta

$$s(g,p) = \sum_{j=1}^{m-1} \inf_{[j,j+1]} g = \sum_{j=1}^{m-1} g(j+1) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{(j+1)^\alpha}$$

$$S(g,p) = \sum_{j=1}^{m-1} \sup_{[j,j+1]} g = \sum_{j=1}^{m-1} g(j) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j^\alpha}$$

da cui $\quad s(g,p) \leq \int_1^m \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leq S(g,p)$

$$s(g,p) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{(j+1)^\alpha} = \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\int_1^m \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[-\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^m = -\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{m^{\alpha-1}}-1\right)$$

$$S(g,p) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j^\alpha}$$

Per $\alpha > 1$ si trova in particolare

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{m^{\alpha-1}}\right)$$

e passando al limite per $m \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

Perciò la serie armonica generalizzata converge se $\alpha > 1$ (come avevamo enunciato a suo tempo, ma dimostrato solo per $\alpha \geq 2$).

Per $\alpha < 1$, la serie diverge e

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\, m^{1-\alpha} + O(1)$$

Integrali impropri

Si parla di integrali impropri quando la funzione non è limitata in un intorno di un estremo dell'intervallo, oppure quando l'intervallo non è limitato.

Esempi:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Gli integrali impropri si definiscono mediante limiti:

Defn Siano $-\infty < a < b \leq +\infty$ e sia $f : [a,b[\to \mathbb{R}$.
Diciamo che f è integrabile in senso improprio su $[a,b[$ se

1) $\forall r \in [a,b[$, f è integrabile secondo Riemann su $[a,r]$

2) esiste finito il limite $\lim_{r\to b} \int_a^r f(x)\,dx$.

In questo caso si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{r\to b} \int_a^r f(x)\,dx$$

Analogamente per funzioni $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a < b < +\infty$.

Esempi 1) Per quali $\alpha > 0$ la funzione $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ è integrabile in senso improprio su $]0,1]$?

se $\alpha \neq 1$

$$\lim_{r\to 0} \int_r^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{r\to 0} \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_r^1 =$$

$$= \lim_{r\to 0} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{r^{\alpha-1}} \right)$$

Se $\alpha > 1$ si ha $\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^{\alpha-1}} = +\infty$,

quindi il limite di prima è $+\infty$:

$$\lim_{r \to 0} \int_r^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = +\infty$$

e la funzione non è integrabile in senso improprio.

Se $\alpha < 1$ si ha $\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^{\alpha-1}} = \lim_{r \to 0} r^{1-\alpha} = 0$

quindi $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{r \to 0} \int_r^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{1-\alpha}$.

Se $\alpha = 1$ si trova

$$\lim_{r \to 0} \int_r^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{r \to 0} \left[\log x\right]_r^1 = \lim_{r \to 0} (-\log r) = +\infty$$

e $1/x$ non è integrabile in senso improprio.

Quindi

- $\frac{1}{x^\alpha}$ è integrabile in senso improprio su $]0,1]$ se e solamente se $\alpha < 1$

Lo stesso è vero per ogni intervallo limitato avente 0 come uno dei due estremi.

2) Per quali $\alpha > 0$ la funzione $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ è integrabile in senso improprio su $[1, +\infty[$?

In questo caso, se $\alpha \neq 1$

$$\int_1^r \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \left[\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^r = \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{r^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}$$

converge per $r \to +\infty$ se e solamente se $\alpha > 1$, e per $\alpha = 1$.

$$\int_1^r \frac{1}{x}\, dx = [\log x]_1^r = \log r \longrightarrow +\infty \quad \text{per } r \to +\infty$$

Concludiamo che:

$$\boxed{\frac{1}{x^\alpha} \text{ è integrabile in senso improprio su } [1, +\infty[\text{ se e solamente se } \alpha > 1}$$

3) Calcoliamo $\int_0^\infty e^{-x}\, dx$

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^b =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[-e^{-b} + 1\right] = 1$$

<u>Integrali impropri di funzioni non negative</u>

Se $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ è ≥ 0, allora la funzione

$$c \mapsto \int_a^c f(x)\, dx$$

è crescente, dunque il suo limite per $c \to b$ esiste e

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to b} \int_a^c f(x)\, dx = \sup_{a \leq c < b} \int_a^c f(x)\, dx \in [0, +\infty]$$

La funzione è integrabile esattamente quando questo estremo

superiore è finito. Quindi la teoria dell'integrale improprio per le funzioni non negative è analoga a quella delle serie a termini non negativi.
In particolare vale il:

Principio di confronto. Se $0 \leq f \leq g$ sono integrabili secondo Riemann su ogni intervallo $[a, c]$, $\forall c < b$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

In particolare, se g è integrabile in senso improprio su $[a, b[$ allora anche f lo è, mentre se f non lo è, non lo è neppure g.

Funzioni assolutamente integrabili

Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione Riemann integrabile su ogni intervallo $[c, d] \subset]a, b[$. Se

$$\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty$$

allora f si dice assolutamente integrabile. In questo caso, f è anche integrabile in senso improprio su $]a, b[$ e

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Esattamente come per le serie, non è vero il viceversa, come mostra l'esempio seguente:

Esempio La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

è integrabile in senso improprio su $[1, +\infty[$, ma

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx = +\infty.$$

Dato che f è continua su $[0, +\infty[$, è sicuramente integrabile su ogni $[0, b]$, $\forall b > 0$. Perciò basta mostrare che f è integrabile in senso improprio su $[1, +\infty[$. Dato $b \geq 1$ si ha:

$$\int_1^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{\cos b}{b} + \cos 1 - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

Dato che $\frac{\cos b}{b} \to 0$ per $b \to +\infty$, basta mostrare che $\frac{\cos x}{x^2}$ è integrabile in senso improprio su $[1, +\infty[$. Ma

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \leftarrow \text{integrabile su } [1, +\infty[$$

quindi per confronto anche $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|$ è integrabile su $[1, +\infty[$, perciò $\frac{\cos x}{x^2}$ è integrabile essendo assolutamente integrabile.

Mostriamo invece che

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty$$

Dato che $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{1}{2x} \geq \frac{1}{2(k\pi + \pi/6)}$ per $k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{5}{6}\pi$

$$\frac{1}{2(k\pi + \pi/6)} = \frac{1}{2k\pi + \pi/3}$$

si ha

$$\int_0^{k\pi+\frac{5}{6}\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{2j\pi+\pi/3}$$

e l'ultima sommatoria diverge per $k \to +\infty$ trattandosi di una serie armonica