15.5.2012

Decomposizione in frazioni semplici

Una *funzione razionale* è il rapporto tra due polinomi:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

con p, q polinomi a coefficienti complessi.

Per il teorema fondamentale dell'algebra, sia p che q sono prodotti di fattori di grado 1. A meno di dividere numeratore e denominatore per i fattori comuni, possiamo supporre che p e q non abbiano radici in comune.

Vogliamo scrivere $\frac{p}{q}$ in una forma più semplice, che ci permetta, per esempio, di calcolarne facilmente la primitiva.

- Se α è una radice di molteplicità m di q, ossia $q(x) = u(x)(x-\alpha)^m$ con $u(\alpha) \neq 0$, si ha

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{a_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}} + \dots + \frac{a_1}{x-\alpha} + g(x)$$

dove $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ e g è una funzione razionale il cui denominatore ha le stesse radici di q meno la radice α.

dim

Dato che $\frac{p(x)}{u(x)} - \frac{p(\alpha)}{u(\alpha)}$ si annulla per $x = \alpha$, si ha

$$\frac{p(x)}{u(x)} - \frac{p(\alpha)}{u(\alpha)} = \frac{u(\alpha)p(x) - p(\alpha)u(x)}{u(\alpha)u(x)} = \frac{(x-\alpha)V(x)}{u(x)}$$

per un opportuno polinomio V.

Allora $f(x) = \frac{p(x)}{(x-\alpha)^m u(x)} = \frac{1}{(x-\alpha)^m}\left(\frac{p(x)}{u(x)} - \frac{p(\alpha)}{u(\alpha)}\right) + \frac{p(\alpha)}{(x-\alpha)^m}$

$$= \frac{1}{(x-\alpha)^m} \frac{(x-\alpha)V(x)}{u(x)} + \frac{p(\alpha)}{(x-\alpha)^m} =$$

$$= \frac{a_{m-1}}{(x-\alpha)^m} + \frac{V(x)}{(x-\alpha)^{m-1} u(x)}$$

L'ultima frazione è una funzione razionale il cui denominatore si annulla al più nelle radici di q (dato che questi sono i punti dove f non è continua) ma in cui la radice α ha molteplicità minore di m. Iterando questo procedimento, si elimina la radice α dal denominatore $\square$

- In generale, se $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sono le radici di q di molteplicità $m_1, \dots, m_k$ si ha

$$\frac{p(x)}{q(x)} = h_0(x) + h_1(x) + \dots + h_k(x) \qquad (*)$$

dove h_0 è un polinomio e per ogni $j \geq 1$ h_j è della forma

$$h_j(x) = \frac{a_{m_j}}{(x-\alpha_j)^{m_j}} + \frac{a_{m_j-1}}{(x-\alpha_j)^{m_j-1}} + \dots + \frac{a_1}{x-\alpha_j}.$$

con $a_1, \dots, a_{m_j} \in \mathbb{C}$.

Infatti iterando il fatto dimostrato sopra, eliminiamo una a una le radici di q dal denominatore e restiamo con una funzione razionale h_0 il cui denominatore non ha radici. Per il teorema fondamentale dell'algebra, una tale funzione razionale è necessariamente un polinomio.

Esempio $\quad f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

Passo 1 Si effettua la divisione con resto:

$$p(x) = u(x)\,q(x) + r(x)$$

dove grado r < grado q

$$x^4 - 2x^3 + x^2 + x + 1 = x(x^3 - 2x^2 + x) + x + 1$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = x + \frac{x+1}{x^3 - 2x^2 + x}$$

Passo 2 Lavoriamo su $g(x) := \dfrac{x+1}{x^3 - 2x^2 + x}$
e troviamo le radici del denominatore:

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$$

Le sue radici sono 0, di molteplicità 1, e 1, di molteplicità 2. Quindi deve risultare

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-1} \qquad (1)$$

Infatti quando il numeratore ha grado inferiore al denominatore, la decomposizione in frazioni semplici (*) non contiene la parte polinomiale h_0.

Passo 3 Ricaviamo a, b, c

Moltiplicando (1) per x si ha

$$\frac{x+1}{(x-1)^2} = a + \frac{bx}{(x-1)^2} + \frac{cx}{x-1}$$

e ponendo $x = 0$ troviamo $\dfrac{1}{1^2} = a + 0 + 0$, ossia $a = 1$

Moltiplicando (1) per $(x-1)^2$ troviamo

$$\frac{x+1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} + b + c(x-1) \qquad (2)$$

e ponendo $x = 1$ otteniamo $b = 2$

A questo punto c può essere ricavato dalla (2) ponendo, per esempio, $x = 2$:

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 2 + c \iff c = -1$$

Concludiamo che

$$\boxed{f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}}$$

Da questa espressione è facile ricavare una primitiva di f:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \log|x| - \frac{2}{x-1} - \log|x-1| .$$

Es Determinare $c_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$

$$\int \cos^n x \, dx = \int \cos x \cos^{n-1} x \, dx = \sin x \cos^{n-1} x -$$

$$- \int -\sin^2 x \cdot (n-1) \cos^{n-2} x \, dx = \sin x \cos^{n-1} x +$$

$$+ (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x \, dx = \sin x \cos^{n-1} x +$$

$$+ (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \cos^n x \, dx$$

$$n \int \cos^n x \, dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx$$

$$n\, c_n = \left[\sin x \cos^{n-1} \right]_0^{\pi/2} + (n-1)\, c_{n-2}$$

Per $n \geq 2$ $\qquad c_n = \frac{n-1}{n} c_{n-2}$

$$c_0 = \frac{\pi}{2}, \quad c_1 = \left[\sin x \right]_0^{\pi/2} = 1$$

$$c_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}$$

$$c_{2n} = \frac{2n-1}{2n} c_{2n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n \cdot (2n-2)} c_{2n-4} =$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 1}{2n (2n-2) \dots 2} c_0 = \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 1}{2n(2n-2) \dots 2} \frac{\pi}{2}$$

$$c_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} c_{2n-1} = \frac{2n(2n-2)}{(2n+1)(2n-1)} c_{2n-3} =$$

$$= \frac{2n (2n-2) \dots 2}{(2n+1)(2n-1) \dots 3} c_1 = \frac{2n (2n-2) \cdots 2}{(2n+1)(2n-1) \cdots 3}$$

<u>Es</u> (prodotto di Wallis) $\quad W_n := \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \dots \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}$

Determinare $\lim_{n \to \infty} W_n$

$$\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = \frac{2n (2n-2) \cdots 2}{(2n+1)(2n-1) \cdots 3} \frac{2n (2n-2) \cdots 2}{(2n-1)(2n-3) \cdots 1} \frac{2}{\pi} = W_n \frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow W_n = \frac{\pi}{2} \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}}$$

Mostriamo che $\lim_{n \to \infty} \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = 1$

Su $[0, \frac{\pi}{2}]$ vale $\cos^{2n} x \geq \cos^{2n+1} x \geq \cos^{2n+2} x$

da cui, integrando su $[0, \pi/2]$,

$$c_{2n} \geq c_{2n+1} \geq c_{2n+2}$$

$$\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} \leq \frac{c_{2n}}{c_{2n}} = 1$$

$$\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} \geq \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} = \frac{2n-1}{2n-2} \longrightarrow 1 \quad \text{per } n \to \infty$$

Dunque $\lim_{n \to \infty} \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = 1$, da cui

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \quad \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

<u>Es</u> Studiare il comportamento asintotico di $\binom{2n}{n}$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n\,(n-1)\,(n-2)\cdots\cdots 2 \cdot 1)^2}$$

$$= \frac{2n\,(2n-1)(2n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2n\,(2n-2)\cdots 4 \cdot 2)^2}\, 2^{2n}$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{2n\,(2n-2)\cdots 4 \cdot 2}\, 2^{2n} = \left(\frac{(2n-1)^2(2n-3)^2\cdots 3 \cdot 3 \cdot 1}{2n \cdot 2n \cdot (2n-2)(2n-2)\cdots 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2}\right)^{\frac{1}{2}} 2^{2n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{(2n+1)(2n-1)(2n-1)\cdots 3 \cdot 3 \cdot 1}{2n \cdot 2n \cdots 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2}\right)^{\frac{1}{2}} 2^{2n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \frac{1}{\sqrt{w_n}}\, 2^{2n} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n+1}} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{n}}$$