15.11.2011

Numeri complessi

L'equazione $x^2 = -1$ non ha soluzione nel campo dei numeri reali.
Per ovviare a questo problema, ragionando come nella lezione del 20.9, si può allargare il campo dei numeri reali aggiungendo un elemento, l'unità immaginaria i, che per definizione soddisfi $i^2 = -1$.

L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è dato dagli elementi z della forma $z = x + yi$, dove $x, y \in \mathbb{R}$.
Il numero x si dice parte reale di z, $x = \operatorname{Re} z$, e il numero y parte immaginaria di z, $y = \operatorname{Im} z$.
Quindi $\operatorname{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

Esempio: Sia $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a > 0$ un polinomio di grado 2 con coefficienti reali.
Il metodo di completamento dei quadrati mostra che:

$$p(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

Quindi $p(x) = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{4a^2}(b^2 - 4ac)$ (*)

Quando $\Delta := b^2 - 4ac$ è positivo o nullo, troviamo le ben note 2 oppure 1 radici reali.
Se $\Delta < 0$, ossia $4ac - b^2 > 0$, i numeri complessi

$$\pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} i$$

risolvono l'equazione $y^2 = \frac{1}{4a^2}(b^2 - 4ac)$

Quindi, sostituendo in (*),

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{1}{2a}\sqrt{4ac-b^2}\; i$$

e $x = \dfrac{b \pm \sqrt{4ac-b^2}\; i}{2a}$ sono radici complesse di p

Questo mostra che ogni polinomio di grado 2 con coefficienti reali possiede radici in $\mathbb{C}$.
Mostreremo presto che lo stesso è vero se i coefficienti sono complessi e, più avanti, se il grado è qualsiasi.

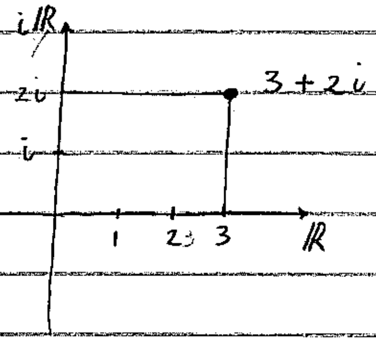
<u>I numeri complessi formano un campo</u>

La <u>somma</u> dei numeri complessi $z = x + yi$ e $z' = x' + y'i$ è definita come:

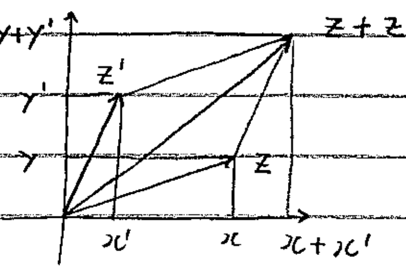
$$z + z' = (x + x') + (y + y')i$$

ossia si sommano separatamente le parti reali e le parti immaginarie: $\boxed{Re(z+z') = Re\, z + Re\, z', \quad Im(z+z') = Im\, z + Im\, z'}$

Rappresentando i numeri complessi come punti del piano cartesiano,



la somma dei numeri complessi corrisponde alla somma di vettori del piano:



← parallelogramma

La somma di numeri complessi soddisfa le proprietà:

- associativa $(z+z')+z'' = z+(z'+z'')$
- commutativa $z+z' = z'+z$
- esiste un elemento neutro $0 = (0+0\cdot i)$ t.c. $0+z=z$
- ogni $z \in \mathbb{C}$ ha un opposto $-z$ t.c. $z+(-z)=0$

infatti $-(x+yi) = -x+(-y)i = -x-yi$

Il prodotto di numeri complessi $z = x+yi$ e $z' = x'+y'i$ è definito da

$$zz' = (x+yi)(x'+y'i) = xx' + xy'i + yx'i + yy'i^2$$
$$= (xx'-yy') + (xy'+x'y)\,i$$

Dunque
$$\boxed{\begin{aligned} Re(zz') &= (Re\,z)(Re\,z') - (Im\,z)(Im\,z') \\ Im(zz') &= (Re\,z)(Im\,z') + (Im\,z)(Re\,z') \end{aligned}}$$

Il prodotto di numeri complessi soddisfa le proprietà

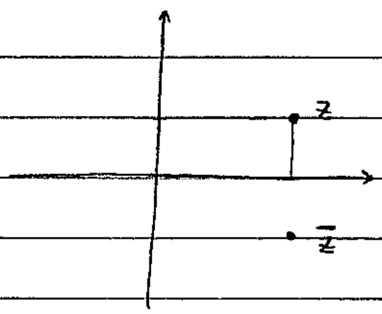
- associativa
- commutativa
- distributiva $z\cdot(z'+z'') = z\cdot z' + z\cdot z''$
- esiste un elemento neutro $1 = 1+0\cdot i$ t.c. $1\cdot z = z$
- ogni $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, ha un opposto, ossia un numero complesso $\frac{1}{z}$ tale che $z\cdot\frac{1}{z} = 1$:

Infatti, se $z = x+yi$, ponendo
$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\,i$$ si ha

$$z\cdot\frac{1}{z} = (x+yi)\left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\,i\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} +$$
$$+\left(-\frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{xy}{x^2+y^2}\right) i = 1$$

Altre operazioni su $\mathbb{C}$

Se $z = x + yi$, il numero $\bar{z} = x - yi$ si dice coniugato di z



$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\bar{z} &= \mathrm{Re}\,z \\ \mathrm{Im}\,\bar{z} &= -\mathrm{Im}\,z \end{aligned}}$$

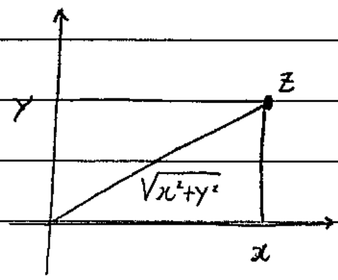
Proprietà

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$

Dato che $z + \bar{z} = x + yi + x - yi = 2x$ e
$z - \bar{z} = x + yi - x + yi = 2yi$
si ha:

$$\boxed{\mathrm{Re}\,z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}\,z = \frac{z - \bar{z}}{2i}}$$

Se $z = x + yi$, il numero reale non negativo
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ si dice modulo di z, o valore assoluto di z, dato che estende il valore assoluto di un numero reale. Nella rappresentazione cartesiana, $|z|$ è la distanza di z dall'origine



(Teorema di Pitagora)

Proprietà

- $|z| \geq 0$ e $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z|^2 = z\bar{z}$

Infatti $(x+yi)(x-yi) = x^2+y^2+(xy-xy)i = x^2+y^2$

- $|\bar{z}| = |z|$
- $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$ e $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$
- $|z \cdot z'| = |z|\,|z'|$

Infatti:

$$|z \cdot z'|^2 = z z' \overline{z z'} = z z' \bar{z} \bar{z'} = |z|^2 |z'|^2$$

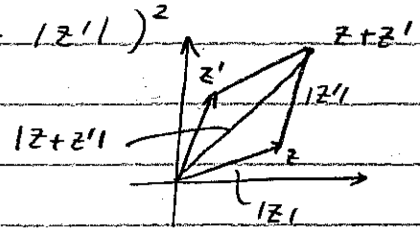
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (disuguaglianza triangolare)

Infatti:

$$|z+z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')} = (z+z')(\bar{z}+\bar{z'}) =$$
$$= z\bar{z} + z'\bar{z'} + z\bar{z'} + z'\bar{z} = |z|^2 + |z'|^2 + z\bar{z'} + \overline{z\bar{z'}}$$
$$= |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{z'}) \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2\,|z\bar{z'}|$$
$$= |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| = (|z| + |z'|)^2$$

da cui

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|$$



Esempio Inverso di $z = x + yi$.

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2+y^2}$$

che è la formula già vista per $1/z$.

Più in generale, per un quoziente $\frac{z'}{z}$:

$$\frac{z'}{z} = \frac{z'\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{z'\bar{z}}{|z|^2} = \frac{(x'+y'i)(x-yi)}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{xx' + yy' + i(xy' - x'y)}{x^2+y^2}$$