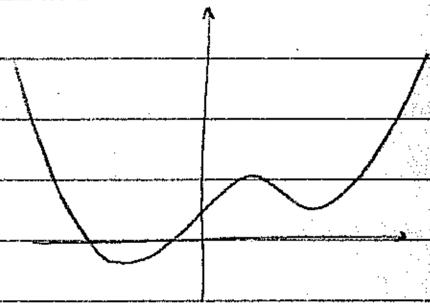
15.12.2011

## Un complemento al Teorema di Weierstrass

**Complemento** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e tale che
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Allora $f$ possiede minimo.



dim

Sia $a := f(0)$. Dal fatto che $f(x)$ diverge sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$ segue che esiste $r > 0$ tale che $f(x) > r$ per $x < -r$ e per $x > r$.
Per il teorema di Weierstrass, la funzione continua $f$ possiede minimo sull'intervallo chiuso e limitato $[-r, r]$: $\exists\, x_0 \in [-r, r]$ tale che
$$f(x_0) = \min_{x \in [-r, r]} f(x)$$

Dato che $0 \in [-r, r]$, $f(x_0)$ risulta $\leq f(0) = a$.
Dato che fuori da $[-r, r]$ $f$ è $> a$, $f(x_0)$ è il minimo di $f$ su tutto $\mathbb{R}$. □

## Limiti e continuità per funzioni su $\mathbb{C}$

Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diciamo che
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w$$

se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall z \in \mathbb{C}$ con $0 < |z - z_0| < \delta$ si ha $|f(z) - w| < \varepsilon$.
Diciamo che $f$ è continua in $z_0$ se $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Sia ora $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che
$$\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = +\infty$$
L'ultima condizione significa: $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists r \geq 0$ tale che se $|z| > r$ allora $f(z) > M$.

Allora, come nel complemento visto prima, possiamo concludere che $f$ possiede minimo su $\mathbb{C}$: la dimostrazione è identica, basta sostituire $[-r, r]$ con $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.

<u>Teorema fondamentale dell'algebra</u> Ogni polinomio a coefficienti complessi e grado $\geq 1$ possiede radici complesse.

<u>dim</u> A meno di dividere per il coefficiente del termine di grado massimo, possiamo supporre che

$$p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad ; \quad n \geq 1$$

Affermiamo che la funzione $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f(z) = |p(z)|$ soddisfa
$$\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = +\infty$$
Infatti $f(z) = |p(z)| = |z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0|$

$$= |z|^n \Big| 1 + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}}_{\downarrow\ 0 \text{ per } |z| \to +\infty} \Big| \longrightarrow +\infty \quad \text{per } |z| \to +\infty$$

Dato che $f$ è anche continua, deduciamo che $f$ possiede minimo: $\exists\, z_0 \in \mathbb{C}$ tale che

$$|p(z_0)| = \min_{z \in \mathbb{C}} |p(z)|$$

Vogliamo dimostrare che $p(z_0) = 0$. A meno di comporre $p$ con la traslazione $z \mapsto z - z_0$, che trasforma polinomi di grado $n$ in polinomi di grado $n$, possiamo supporre che $z_0 = 0$.

Se supponiamo per assurdo $p(0) \neq 0$, allora $p$ è della forma

$$p(z) = a + b z^m + z^{m+1} q(z)$$

con $a \neq 0$, $b \neq 0$, $m \geq 1$ e $q$ polinomio.
A meno di dividere per $a$, possiamo supporre $a = 1$:

$$p(z) = 1 + b z^m + z^{m+1} q(z)$$

Essendo un numero complesso $\neq 0$, $b$ è della forma

$$b = |b| e^{i\beta} \quad \text{con } |b| > 0 \text{ e } \beta \in \mathbb{R}$$

Vogliamo mostrare che esistono degli $z \in \mathbb{C}$ per cui

$$|p(z)| < |p(0)| = 1$$

Questo contraddirà il fatto che $|p(0)|$ è il minimo di $|p|$.

Per far ciò, l'idea è di rendere $bz^m$ un numero negativo, piccolo in valore assoluto.
Posto

$$z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

si ha

$$bz^m = |b|e^{i\beta} r^m e^{im\theta} = |b| r^m e^{i(\beta + m\theta)}$$

Se scegliamo $\theta$ in modo che $\beta + m\theta = \pi$, ossia $m = \frac{1}{m}(\pi - \beta)$, otteniamo

$$bz^m = |b| r^m e^{i\pi} = -|b| r^m < 0$$

Per tale scelta di $\theta$ si ha

$$|p(z)| = |p(re^{i\theta})| = |1 + b r^m e^{im\theta} +$$

$$+ r^{m+1} e^{i(m+1)\theta} q(re^{i\theta})| =$$

$$= |1 - |b| r^m + r^{m+1} e^{i(m+1)\theta} q(re^{i\theta})|$$

$$\leq |1 - |b| r^m| + |r^{m+1} e^{i(m+1)\theta} q(re^{i\theta})|$$

Il numero $1 - |b| r^m$ è reale e, per $r > 0$ piccolo, positivo. La quantità

$$|r^{m+1} e^{i(m+1)\theta} q(re^{i\theta})|$$

è $O(r^{m+1})$ per $r \to 0$. Quindi

$$|p(re^{i\theta})| \leq 1 - |b| r^m + O(r^{m+1}) =$$

$$= 1 - r^m(|b| + O(r)) \qquad \text{per } r \to 0$$

Dato che $|b| > 0$, la quantità $|b| + O(r)$ è positiva per $r$ sufficientemente piccolo, da cui

$$1 - r^m(|b| + O(r)) < 1$$

per $r > 0$ sufficientemente piccolo. Quindi abbiamo trovato degli $z$ per cui

$$|p(z)| < |p(0)| = 1,$$

contraddicendo il fatto che $|p(0)|$ fosse il minimo di $|p|$. $\lightning$ □

<u>Corollario</u> Ciascun polinomio di grado $m \geq 1$,

$$p(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^j, \qquad a_j \in \mathbb{C}, \quad a_m \neq 0,$$

si fattorizza in fattori di grado 1:

$$p(z) = a_m (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)$$

dove $z_1, z_2, \dots, z_m \in \mathbb{C}$ sono le radici di $p$.

Infatti per il teorema fondamentale dell'algebra, $p$ ha una radice complessa $z_1$. Ma allora

$$p(z) = (z - z_1)\, q(z) \quad \text{con grado } q = m - 1$$

e se $m - 1 \geq 1$ si fattorizza $q$ e via di seguito fino arrivare al grado 0.
Ovviamente, alcune delle radici possono coincidere.