17.11.2011

Ancora notazione di Landau

Il limite importante $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ si riscrive

come $\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x-1}{x} - 1\right) = 0$, ovvero come

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = 0$, cioè $e^x - 1 - x = o(x)$ per $x\to 0$

ossia $\boxed{e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{per } x \to 0}$

Analogamente, il limite importante $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

è equivalente a $\boxed{\log(1+x) = x + o(x) \quad \text{per } x\to 0}$

Rivediamo con la notazione di Landau gli ultimi due esercizi per casa del 10.11.2011

Es 7 Mostrare che $\log n! = n\log n - n + o(n)$ per $n\to\infty$

Sappiamo che $\sqrt[n]{n!} = \frac{n}{e} + o(n)$ per $n\to\infty$.

$\frac{n}{e} + o(n) = n\left(\frac{1}{e} + \frac{o(n)}{n}\right)$

Ma $\frac{o(n)}{n}$ è un infinitesimo, per definizione di o-piccolo: $\frac{o(n)}{n} = o(1)$.

Quindi $\sqrt[n]{n!} = n\left(\frac{1}{e} + o(1)\right)$ e prendendo il

logaritmo: $\log\sqrt[n]{n!} = \log\left[n\left(\frac{1}{e} + o(1)\right)\right]$

Analizziamo separatamente i due membri:

$\log \sqrt[n]{n!} = \log (n!)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log n!$

$\log\left(n\left(\frac{1}{e}+o(1)\right)\right) = \log n + \log\left(\frac{1}{e}+o(1)\right) =$

$= \log n + \log \frac{1}{e} + o(1)$ poiché $\log x$ è continua in $x = \frac{1}{e}$

Oss f continua in $x_0 \iff f(x_0 + o(1)) = f(x_0) + o(1)$ per $x \to 0$

Dunque $\log\left(n\left(\frac{1}{e}+o(1)\right)\right) = \log n - 1 + o(1)$.

Mettendo assieme quanto visto,

$\frac{1}{n} \log n! = \log n - 1 + o(1)$

Moltiplicando per n

$\log n! = n \log n - n + n\, o(1)$

Ma $n \cdot o(1) = o(n)$, per definizione di o-piccolo, da cui

$\log n! = n \log n - n + o(n)$

Regole di calcolo con la notazione di Landau

- Se $c \neq 0$ $\quad c \cdot o(f) = o(f)$, $c \cdot O(f) = O(f)$

$$\log(1+3x) = 3x + o(3x) = 3x + o(x) \quad \text{per } x \to 0$$

- $f \cdot o(g) = o(fg)$, $f \cdot O(g) = O(fg)$

$$n^3 O(1) = O(n^3)$$

- Più in generale $\begin{cases} o(f)\,o(g) = o(fg) \\ O(f)\,o(g) = o(fg) \\ O(f)\,O(g) = O(fg) \end{cases}$

Per $x \to 0$, $\quad e^x \log(1+x) = \left(1 + x + o(x)\right)\left(x + o(x)\right)$

$$= x + o(x) + x^2 + x\,o(x) + x\,o(x) + o(x)\,o(x)$$
$$= x + o(x) + x^2 + \underbrace{o(x^2) + o(x^2) + o(x^2)}_{= o(x^2)}$$

$$= x + o(x) + x^2 + o(x^2) = x + o(x)$$

dato che $x^2 = o(x)$ e $o(x^2) = o(x)$, cioè una funzione che sia $o(x^2)$ è a maggior ragione $o(x)$: $f(x) = o(x^2)$ significa $f(x) = x^2\,\varepsilon(x)$ con $\varepsilon(x)$ infinitesimo (in questo caso per $x \to 0$) per cui $f(x) = x \cdot x\,\varepsilon(x)$ dove $x\,\varepsilon(x)$ è anch'esso infinitesimo, cioè $f(x) = o(x)$

Oss Lavorando con la notazione di Landau le uguaglianze non sono reversibili.

Attenzione: dalle uguaglianze

(1) $e^x - 1 = x + o(x)$

(2) $\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$

non possiamo ovviamente dedurre che $e^x - 1 = \log(1+x)$.
La deduzione corretta è

$$e^x - 1 = \log(1+x) + o(x) \qquad \text{per } x \to 0$$

Infatti sottraendo dalla (1) la (2) troviamo

$$e^x - 1 - \log(1+x) = x + o(x) - (x + o(x)) = o(x)$$

poiché $o(x) - o(x) = o(x)$ (non 0 !!)

Il motivo è che i due $o(x)$ che compaiono nella (1) e nella (2) sono abbreviazioni che indicano due funzioni della forma

$$x f(x) \qquad e \qquad x g(x)$$

con f e g infinitesime per $x \to 0$. Però $f \neq g$, dunque

$$o(x) - o(x) = x f(x) - x g(x) = x(f(x) - g(x)) = o(x)$$

dato che $f - g$ è ancora un infinitesimo per $x \to 0$.

Numeri complessi

Ricordiamo che $|z|^2 = z\bar{z}$ è reale non negativo

Es Dire per quali $z \in \mathbb{C}$ il numero $\frac{zi}{-\bar{z}}$ risulta reale negativo

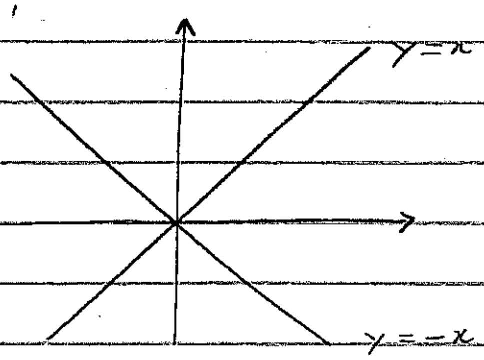
$$\frac{zi}{-\bar{z}} = -\frac{zi}{\bar{z}} \cdot \frac{z}{z} = -\frac{1}{|z|^2} z^2 i$$ che è reale negativo $\iff$ $z^2 i$ è reale positivo.

Posto $z = x + yi$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$z^2 i = (x+yi)^2 i = (x^2 + 2xyi - y^2)\, i$$
$$= i(x^2 - y^2) - 2xy$$

che è reale positivo $\iff$ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ xy < 0 \end{cases}$

Dato che $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, l'insieme degli $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^2 - y^2 = 0$ è dato dagli insiemi $y = x$ e $y = -x$, ossia



Insieme alla condizione $xy < 0$, troviamo che l'insieme richiesto è $y = -x$ meno il punto $(0,0)$

In conclusione, gli z cercati sono i numeri complessi della forma $z = x - ix$ con $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

L'esponenziale complesso

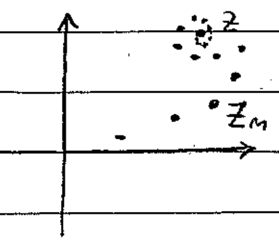
Se (z_n) è una successione di numeri complessi, diciamo che $z_n \to z$ se risulta

$$\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z \quad e \quad \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$$

Equivalentemente, se

$$|z_n - z| \to 0$$

La quantità $|z_n - z|$ è la distanza tra i punti z_n e z nel piano, quindi $z_n \to z$ quando i punti z_n si avvicinano sempre di più a z:



Defn La funzione $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è definita come

$$\exp(z) = e^z := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Si può infatti dimostrare che questo limite esiste per ogni $z \in \mathbb{C}$, e non soltanto per gli $z \in \mathbb{R}$ come già sappiamo.
Non lo dimostreremo, come pure non dimostreremo le seguenti proprietà, che generalizzano quelle dell'esponenziale reale.

Proprietà

1) La funzione esponenziale è continua (vedremo più avanti cosa questo significhi per funzioni definite su $\mathbb{C}$)

2) $\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$, che si può anche scrivere

come $e^z = 1 + z + o(z)$ per $z \to 0$

(Chiariremo più avanti la nozione di limite per funzioni definite su $\mathbb{C}$)

3) $e^{z+w} = e^z \cdot e^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

4) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

La (4) è l'unica di queste proprietà a non avere un corrispettivo reale. Dando per buona l'esistenza del limite che definisce e^z, segue semplicemente dall'uguaglianza

$$\overline{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{\overline{z}}{n}\right)^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Conseguenze

- Per ogni $z \in \mathbb{C}$ risulta

$$|e^z|^2 = e^z \overline{e^z} \overset{(4)}{=} e^z e^{\overline{z}} \overset{(3)}{=} e^{z+\overline{z}} = e^{2 \operatorname{Re} z}$$

Quindi: $\boxed{|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \qquad \forall z \in \mathbb{C}}$

Dato che l'esponenziale reale è positivo, deduciamo che $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, ossia

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

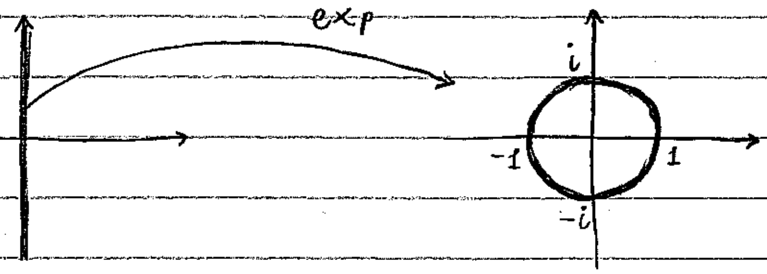
- Se z è immaginario puro, ossia se $z = yi$ con $y \in \mathbb{R}$, si ha

$$|e^z| = |e^{yi}| = e^{Re(yi)} = e^0 = 1$$

Quindi la funzione esponenziale manda l'asse immaginario $i\mathbb{R}$ nell'insieme

$$\mathbb{U} := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \},$$

che è la circonferenza di raggio 1 e centro 0.



> Più precisamente, si può dimostrare che $\forall \theta \in \mathbb{R}$ il numero complesso $e^{i\theta}$ è il punto sulla circonferenza unitaria $\mathbb{U}$ che si ottiene partendo da 1 e ruotando in senso antiorario di θ radianti, ossia di un arco di lunghezza θ

Ricordando che la circonferenza unitaria ha lunghezza 2π, otteniamo che

$$1 = e^0 = e^{2\pi i} = e^{4\pi i} = e^{6\pi i} = \dots$$

$$i = e^{\frac{\pi}{2} i} = e^{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) i} = e^{\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi\right) i} = \dots$$

$$-1 = e^{\pi i} = e^{3\pi i} = e^{5\pi i} = \dots$$

$$-i = e^{\frac{3}{2}\pi i} = e^{\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi\right) i} = e^{\left(\frac{3}{2}\pi + 4\pi\right) i} = \dots$$

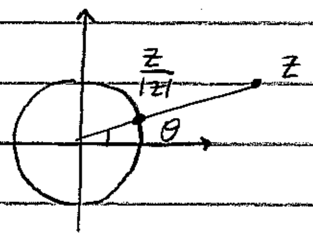
poiché in generale

$$e^{(\theta + 2\pi) i} = e^{\theta i + 2\pi i} = e^{\theta i} \underbrace{e^{2\pi i}}_{= 1} = e^{\theta i} \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

ossia $e^{(\theta + 2\pi) i} = e^{\theta i}$, cioè $\theta \mapsto e^{\theta i}$ è una funzione periodica di periodo 2π da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{U}$

<u>Oss</u> In effetti, è possibile definire il numero π proprio usando l'esponenziale complessa su $i\mathbb{R}$.

- Sia ora $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Il numero $\frac{z}{|z|}$ appartiene alla semiretta Oz ed ha modulo 1:



Detto θ l'angolo che Oz forma con il semiasse positivo delle x si ha dunque $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, da cui

$$z = |z| e^{i\theta}$$

θ si dice <u>argomento</u> del numero complesso z.
Ogni numero complesso $z \neq 0$ si scrive come il suo modulo moltiplicato per l'esponenziale di i volte il suo argomento.