18.10.2011

Funzioni continue

Def Siano $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ e di accumulazione per A. Diciamo che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

In altre parole, f è continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tale che

$$\begin{cases} x \in A \\ |x - x_0| < \delta \end{cases} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Se $x_0 \in A$ ma non è di accumulazione per A, il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ non ha significato ma, dato che la condizione sopra è sempre vera, si conviene che f è continua in x_0.

Esempi Le funzioni $f(x) = 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = x \; \forall x \in \mathbb{R}$ sono continue in ogni $x \in \mathbb{R}$.

La funzione $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ (funzione segno)

non è continua in 0, in quanto non esiste il $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$

Nemmeno la funzione $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è continua

in 0, poiché $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ mentre $f(0) = 1$.

Proprietà Dalle proprietà dei limiti segue che:

- (Permanenza del segno) Se $f: A \to \mathbb{R}$ è continua in x_0 e $f(x_0) > 0$, allora esiste un intorno U di x_0 (ad esempio $U =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ con $\varepsilon > 0$) tale che $\forall x \in U \cap A$ risulta $f(x) > 0$.

• (Proprietà algebriche) Se f e g sono funzioni continue in x_0, allora anche $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ sono continue in x_0. Se inoltre $g(x_0) \neq 0$, allora $\frac{f}{g}$ è continua in x_0.

Def Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ si dice continua se è continua in x_0 $\forall x_0 \in A$.

Dalla continuità delle funzioni costanti e della funzione $f(x) = x$ segue, grazie alle proprietà algebriche, la continuità dei polinomi, ossia delle funzioni $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ della forma $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$.

Ricordiamo che in questo caso, se $a_n \neq 0$, n si dice grado del polinomio p. Inoltre, $p(x_0) = 0$ se e solamente se $p(x) = (x - x_0)\, q(x)$ con

$$\text{grado } q = \text{grado } p - 1$$

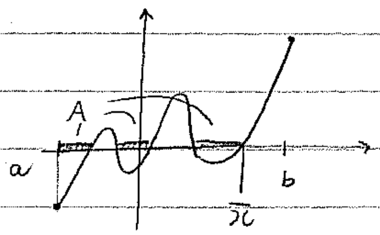
Ne segue che un polinomio non identicamente nullo ha al più (grado n) radici reali, ossia numeri $x_0 \in \mathbb{R}$ tali che $p(x_0) = 0$.

Se p e q sono polinomi, la funzione $f = \frac{p}{q}$ si dice funzione razionale (assumiamo $q \not\equiv 0$). Questa funzione risulta continua su $\mathbb{R} \setminus \{\text{radici di } q\}$, ossia sul complementare di un insieme finito.

Teorema (degli zeri) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora $\exists\, \bar{x} \in \,]a,b[$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.

dim 1

Poniamo $\bar{x} := \sup A$ dove $A = \{x \in [a,b] \mid f(x) < 0\}$



$A \neq \emptyset$ poiché $f(a) < 0 \Rightarrow \bar{x} \geq a$
$A \subset [a,b] \Rightarrow \bar{x} \leq b$
Mostriamo che $f(\bar{x}) = 0$ (quindi in particolare $\bar{x} \neq a$ e $\bar{x} \neq b$).

Se fosse $f(\bar{x}) > 0$ si avrebbe innanzitutto $\bar{x} > a$ (poiché $f(a) < 0$) e per la permanenza del segno esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $a < \bar{x} - \varepsilon < \bar{x}$ e $f(x) > 0 \quad \forall x \in \,]\bar{x} - \varepsilon, \bar{x}]$. Ciò viola il fatto che $\bar{x}$ sia l'estremo superiore dell'insieme dove $f < 0$.

Se fosse $f(\bar{x}) < 0$ si avrebbe innanzitutto $\bar{x} < b$ (poiché $f(b) > 0$) e per la permanenza del segno esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $\bar{x} < \bar{x} + \varepsilon < b$ e $f(x) < 0 \quad \forall x \in [\bar{x}, \bar{x} + \varepsilon[$. Anche ciò viola il fatto che $\bar{x}$ sia l'estremo superiore dell'insieme dove $f < 0$.

Concludiamo che $f(\bar{x}) = 0$ □

dim 2 (metodo di bisezione)

Consideriamo il punto medio $\frac{a+b}{2}$ dell'intervallo $[a,b]$. Se $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, l'intervallo $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, che è lungo la metà, soddisfa le ipotesi del teorema ed è lì che possiamo cercare $\bar{x}$.

Se invece $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, è l'intervallo $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, sempre di lunghezza metà, a soddisfare le ipotesi del teorema ed è lì che possiamo cercare $\bar{x}$.
Iterando questo procedimento troviamo intervalli via via più corti, i cui estremi dovrebbero convergere ad un punto $\bar{x} \in]a,b[$ tale che $f(\bar{x}) = 0$
Formalizziamo questa idea mediante la seguente costruzione induttiva: poniamo $a_0 = a$ e $b_0 = b$ e per ogni $n \geq 1$ vogliamo trovare a_n e b_n in $[a,b]$ tali che

1) $a_n \geq a_{n-1}$ e $b_n \leq b_{n-1}$
2) $b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$
3) $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) \geq 0$

Supponendo di aver già definito a_j e b_j per ogni $j \leq n$, definiamo a_{n+1} e b_{n+1} nel modo seguente:
se $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0$, poniamo $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$
se $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$, poniamo $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ e $b_{n+1} = b_n$

Si verifica immediatamente che con queste scelte le proprietà 1), 2) e 3) sono soddisfatte.
Quindi a_n e b_n sono ben definite $\forall n \in \mathbb{N}$.
Dato che (a_n) è crescente e $\leq b$, $a_n \to A \in]a,b]$
Dato che (b_n) è decrescente e $\geq a$, $b_n \to B \in [a,b[$
Da 2) segue che $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ e passando al limite per $n \to \infty$ si trova $B - A = 0$.
Quindi, posto $\bar{x} := A = B$, si ha $a_n \to \bar{x}$ e $b_n \to \bar{x}$
Da 3) segue allora $f(\bar{x}) \leq 0$ e $f(\bar{x}) \geq 0$, da cui $f(\bar{x}) = 0$ $\square$

Oss Il metodo di bisezione fornisce anche un algoritmo per determinare una soluzione dell'equazione $f(x)=0$. Per funzioni f solamente continue questo è l'algoritmo più efficiente, mentre per funzioni più regolari esistono algoritmi che convergono più rapidamente, come vedremo più avanti.

Es Mostrare che $x^3+x+1=0$ possiede soluzioni.

Poniamo $f(x)=x^3+x+1$. f è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$. $f(-1)=-1$ e $f(0)=1$. Quindi $\exists\ \bar{x}\in\ ]-1,0[$ tale che $f(\bar{x})=0$.

Più in generale, vale la seguente:

Prop Ogni polinomio di grado dispari possiede almeno una radice.

dim

$$p(x)=\sum_{j=0}^{2n+1} a_j x^j \quad \text{con} \quad a_{2n+1}\neq 0 \quad \text{e} \quad n\in\mathbb{N}.$$

A meno di cambiare il segno di p, possiamo supporre $a_{2n+1}>0$. Dato che

$$p(x)=x^{2n+1}\left(a_{2n+1}+\frac{a_{2n}}{x}+\frac{a_{2n-1}}{x^2}+\dots+\frac{a_1}{x^{2n}}+\frac{a_0}{x^{2n+1}}\right)$$

risulta $\lim_{x\to+\infty} p(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} p(x)=-\infty$

In particolare, posso trovare $b>0$ tale che $p(b)>0$ e $a<0$ tale che $p(a)<0$. Per il teorema degli zeri applicato a $p|_{[a,b]}$, $\exists\ \bar{x}\in\ ]a,b[$ tale che $p(\bar{x})=0$. $\square$

(teorema dei valori intermedi)

Corollario Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$

dim Supponiamo per esempio $f(a) < f(b)$ e sia $L \in]f(a), f(b)[$. Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = f(x) - L$$

Allora g è continua in $[a,b]$ e $g(a) = f(a) - L < 0$, mentre $g(b) = f(b) - L > 0$. Per il teorema degli zeri esiste $\bar{x} \in]a,b[$ tale che $g(\bar{x}) = 0$, ossia

$$f(\bar{x}) = L. \qquad \square$$

Oss Un altro modo di enunciare il teorema dei valori intermedi è il seguente: una funzione continua manda intervalli in intervalli.

Limiti sinistri e destri

Def Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per $A \cap]-\infty, x_0[$. Diciamo che il limite sinistro di $f(x)$ per $x \to x_0$ è L se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \left.\begin{array}{l} x \in A \\ x_0 - \delta < x < x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

In questo caso si scrive $\lim_{x \to x_0 -} f(x) = L$

Analogamente si definisce il limite destro

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x)$$

- Esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ se e solamente se esistono i limiti sinistro e destro per $x \to x_0$ e questi coincidono. (Segue immediatamente dalle definizioni)