19.3.2012

Confronto asintotico di serie

- Siano $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ e $b_n = O(a_n)$ per $n \to \infty$ (ricordiamo che questo significa che $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che
$$b_n \leq c\, a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\ )$$

Allora se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente, anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ lo è

(per confronto, e vale $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \leq c \sum_{n=0}^{\infty} a_n$)

Conseguenza Se le successioni $a_n > 0$ e $b_n > 0$ sono asintotiche, ossia
$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$
allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se e solamente se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge.

Infatti in questo caso $a_n = O(b_n)$ e $b_n = O(a_n)$.
Lo stesso vale se $\lim a_n/b_n = L$ con $0 < L < +\infty$.

Esempio $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ diverge, poiché $\lim_{n \to \infty} \frac{\sin 1/n}{1/n} = 1$

e la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente.

Convergenza assoluta

Sia $(a_n) \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali.

Def^{n} Diciamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se la serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è convergente.

Prop Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente, allora è convergente e vale

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

dim

La successione delle somme parziali

$$S_K = \sum_{n=0}^{K} a_n$$

è limitata, in quanto:

$$|S_K| = \left|\sum_{n=0}^{K} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{K} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty \qquad (*)$$

Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, (S_K) possiede una sottosuccessione (S_{h_K}) convergente

$$\lim_{K \to \infty} S_{h_K} = S \in \mathbb{R}$$

Mostriamo che $\lim_{m \to \infty} S_m = S$. Dato $\varepsilon > 0$, possiamo trovare m_0 tale che $\sum_{n=m_0}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$, poiché $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

Allora se $m_0 \leq m \leq h_K$ risulta

$$\left|\sum_{n=0}^{m} a_n - S\right| = \left|\sum_{n=0}^{h_K} a_n - S - \sum_{n=m+1}^{h_K} a_n\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{n=0}^{h_K} a_n - S\right| + \left|\sum_{n=m+1}^{h_K} a_n\right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left|\sum_{n=0}^{h_K} a_n - S\right|}_{\downarrow \, 0} + \underbrace{\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|}_{< \, \varepsilon}$$

Quindi $|S_n - S| < \varepsilon$ definitivamente, come volevasi dimostrare. La stima per $|S|$ segue da (*) passando al limite in K. $\square$

Esempio Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

La successione $\sin n$ assume sia valori positivi che negativi. Dato che

$$\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

la serie data converge assolutamente, per confronto con la serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$. Quindi la serie data converge.

Esistono serie che convergono, pur non convergendo assolutamente. Un esempio è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Abbiamo già visto che questa serie converge (la sua somma vale $\log 2$, come abbiamo dedotto dalla formula di Taylor con resto di Lagrange per la funzione $\log(1+x)$, $x_0 = 0$, $x = 1$).
Però

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

e la serie armonica diverge.

Oss Si potrebbe dimostrare che se una serie $\sum a_n$ converge assolutamente, allora converge assolutamente anche ogni serie ottenuta riordinando i suoi termini e il valore della somma è il medesimo. Questo non vale per le serie che convergono ma non assolutamente: se $\sum a_n$ è una tale serie e $S \in [-\infty, +\infty]$ è arbitrario, allora esiste un riordinamento (a_n') dei termini tale che $\sum a_n' = S$.

Serie a segni alterni

Criterio di Leibniz Sia $a_n \geq 0$, decrescente e infinitesima. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

converge

La già menzionata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ è di questo tipo (a meno del segno).

dim Sia $S_K = \sum_{n=0}^{K} (-1)^n a_n$. Mostreremo che (S_{2K}) e (S_{2K+1}) convergono ed hanno lo stesso limite. Questo implica che anche (S_K) converge.

(S_{2K}) è decrescente: $S_{2(K+1)} - S_{2K} = (-1)^{2(K+1)} a_{2(K+1)} + (-1)^{2K+1} a_{2K+1}$
$= a_{2K+2} - a_{2K+1} \leq 0$

(S_{2K+1}) è crescente: $S_{2K+1} - S_{2K-1} = -a_{2K+1} + a_{2K} \geq 0$.

Quindi

$$S_{2K} = a_{2K} + S_{2K-1} \geq S_{2K-1} \geq S_1$$

e (S_{2K}) è limitata inferiormente.

Essendo decrescente e limitata inferiormente, (S_{2K}) converge ad un certo $S \in \mathbb{R}$. Dato che $S_{2K+1} = S_{2K} - a_{2K+1}$

e (a_n) è infinitesima, anche (S_{2k+1}) converge a S. $\square$

Serie di potenze

Una serie di potenze è un'espressione del tipo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Molte tra le funzioni più importanti possono essere espresse in questo modo

Esempi

1. Verifichiamo che $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

Dato che $\sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}$ è il polinomio di Taylor di grado k della funzione e^x (in $x_0 = 0$), per la Formula di Taylor con resto di Lagrange si ha:

$$e^x - \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{(k+1)!} \left(D^{k+1} e^x \Big|_{x=y} \right) x^{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} e^y x^{k+1}$$

con y compreso tra 0 e x. La tesi segue da:

$$\left| \frac{1}{(k+1)!} e^y x^{k+1} \right| = \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} e^y \leq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} e^{\max\{0,x\}} \longrightarrow 0$$

per $k \to \infty$

2 In modo analogo si dimostra che

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad , \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3 Abbiamo già visto che

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \forall x \in \,]-1, 1[}$$

4 Risulta

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad \forall x \in \,]-1, 1]}$$

La dimostrazione è analoga a quella già vista per $x = 1$

5 Risulta:

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad \forall x \in [-1, 1]}$$

La dimostrazione è analoga a quella già vista per $x = 1$.

Lo studio di questi esempi suggerisce che le serie di potenze convergono $\forall x \in I$, dove I è un intervallo simmetrico rispetto a 0 (eventualmente $I = \mathbb{R}$), che può includere o meno i suoi estremi.