20.3.2012

Es 1 Stimare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}$ a meno di $\frac{1}{100}$.

Scriviamo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}$ e

stimiamo l'ultima somma:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \dots = \frac{1}{k}$$

Dato che $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{100}$ per $k \geq 100$, concludiamo che $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}$ approssima la somma della serie a meno di $1/100$.
Questa somma può essere calcolata esplicitamente con una calcolatrice e molta pazienza.

Es 2 Quanto bene $\sum_{n=0}^{9} \frac{1}{n!}$ approssima il numero e ?

Dalla formula di Taylor con resto di Lagrange applicata alla funzione e^x con $x_0 = 0$, $x = 1$, si trova

$$e - \sum_{n=0}^{9} \frac{1}{n!} = e^x - \sum_{n=0}^{9} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{10!} D^{10} e^z \Big|_{z=y} x^{10} = \frac{1}{10!} e^y$$

con $0 < y < 1$. Dato che $\frac{1}{10!} e^y \leq \frac{e}{10!} < \frac{3}{10!} = \frac{1}{1'209'600}$

$\sum_{n=0}^{9} \frac{1}{n!}$ approssima e per difetto con un errore inferiore a 10^{-6}

Es 3 Discutere la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

Si tratta di una serie a segni alterni. Dato che $\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{n + n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$ è infinitesima e decrescente (essendo somma di due successioni infinitesime e decrescenti), la serie data converge per il criterio di Leibniz.

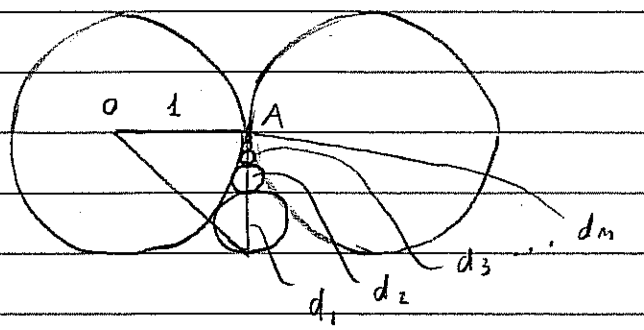
E' anche possibile determinare esplicitamente la somma di questa serie:

$$\sum_{n=1}^{k} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{k} (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} -$$

$$- \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^k \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) = -1 + (-1)^k \frac{1}{k+1} \to -1$$

Perciò $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} = -1$

Es 4 Calcolare i diametri delle circonferenze piccole in figura:



Per costruzione

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = 1$$

Sia O_n il centro dell'n-esima circonferenza

Da $|OO_1|^2 = |OA|^2 + |O_1A|^2$ deduciamo che

$\left(1 + \frac{d_1}{2}\right)^2 = 1 + \left(1 - \frac{d_1}{2}\right)^2$ da cui

$$1 + d_1 + \frac{d_1^2}{4} = 1 + 1 - d_1 + \frac{d_1^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad d_1 = \frac{1}{2}$$

Dimostriamo che $d_n = \frac{1}{n(n+1)}$. La formula è vera per $n = 1$.
Se è vera fino a $n-1$, dal teorema di Pitagora applicato al triangolo OO_nA troviamo:

$$|OO_n|^2 = |OA|^2 + |O_nA|^2$$

ossia:

$$\left(1 + \frac{d_n}{2}\right)^2 = 1 + \left(1 - \sum_{h=1}^{n-1} d_h - \frac{d_n}{2}\right)^2$$

$$\left(1 + \frac{d_n}{2}\right)^2 = 1 + \left(1 - \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h(h+1)} - \frac{d_n}{2}\right)^2$$

Dato che $\displaystyle\sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h(h+1)} = \sum_{h=1}^{n-1} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h+1}\right) = 1 - \frac{1}{n}$, si ha

$$\left(1 + \frac{d_n}{2}\right)^2 = 1 + \left(1 - 1 + \frac{1}{n} - \frac{d_n}{2}\right)^2$$

$$1 + d_n + \frac{d_n^2}{4} = 1 + \frac{1}{n^2} - \frac{d_n}{n} + \frac{d_n^2}{4}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) d_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{n+1}{n} d_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow d_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

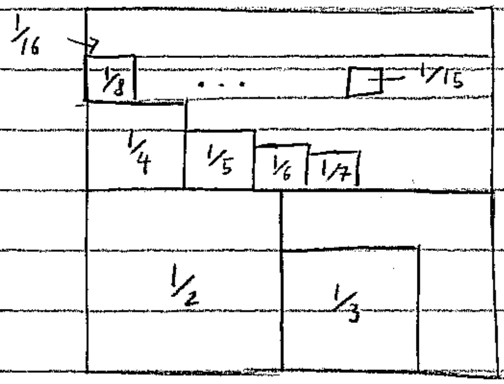
come volevasi dimostrare
Quindi la figura precedente fornisce un'interpretazione geometrica del fatto che la serie di Mengoli ha somma 1.

Es 5 E' possibile inscatolare i quadrati di lato $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ dentro un quadrato di lato 1, senza sovrapporli?

La somma delle aree è $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} =$

$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1$, quindi potrebbe essere possibile

Inscatoliamoli in questo modo



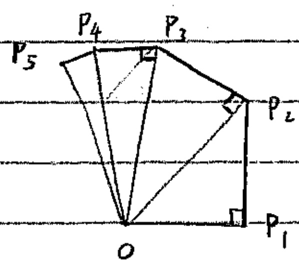
La somma delle altezze è

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$

Perciò ci stanno tutti

Es 6 Sia O un punto del piano e sia P_1 un punto a distanza 1 da O. Il segmento P_1P_2 è lungo 1 ed è ortogonale a OP_1. Il segmento P_2P_3 è lungo $1/2$ ed è ortogonale a OP_2. Iterando, il segmento P_nP_{n+1} è lungo $\frac{1}{n}$ ed è ortogonale a OP_n. Dire se i punti P_n si mantengono a distanza limitata da O



$|OP_{n+1}|^2 = |OP_n|^2 + \frac{1}{n^2}$

Perciò

$|OP_m|^2 = \sum_{h=1}^{m-1} \frac{1}{h^2} \leq \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} < +\infty$

I punti P_n si mantengono a distanza limitata da O.

Es 7 Discutere la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

Dato che $\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la serie converge per confronto asintotico con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

Es 8 Discutere la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\cos n^2 + \sqrt{n}\right)$$

Dato che $\frac{1}{n}(\cos n^2 + \sqrt{n}) \geq \frac{1}{n}(-1+\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}$

e $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right)\sqrt{n} = 1$, la serie