20.9.2011

I numeri reali

- Numeri naturali : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$

Su $\mathbb{N}$ sono ben definite le operazioni di somma e prodotto. Però è facile costruire semplici equazioni che non hanno soluzione: per esempio

$$x + 3 = 1$$

Sappiamo tutti che la soluzione di questa equazione, $x = -2$, ci obbliga a considerare anche numeri negativi, ossia ad allargare l'insieme dei numeri naturali a quello dei:

- Numeri interi: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

In $\mathbb{Z}$ la somma gode delle proprietà:

- associativa : $(a+b)+c = a+(b+c)$
- commutativa : $a+b = b+a$
- elemento neutro : vi è un numero particolare, lo zero 0, tale che $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{Z}$
- opposto : per ogni numero intero a esiste un altro numero, detto suo opposto e indicato con $-a$, tale che $a + (-a) = 0$.

Oss 1 Da queste proprietà è semplice dimostrarne altre, di uso frequentissimo, come ad esempio (1) da $a+b=a+c$ segue che $b=c$, (2) l'elemento neutro 0 è unico, (3) l'elemento opposto di a è unico, (4) $-(-a) = a$.

Oss 2 La sottrazione è in un certo senso un'operazione secondaria, definita da $a - b := a + (-b)$

[definizione]

Anche il prodotto in $\mathbb{Z}$ è un'operazione secondaria: $5n$ significa $n+n+n+n+n$.

Anche in $\mathbb{Z}$ è semplice esibire equazioni senza soluzioni, come ad esempio: $3x = 2$.
La soluzione di questa equazione, $x = \frac{2}{3}$, ci obbliga a considerare anche le frazioni, dette anche:

- <u>Numeri razionali</u>: $\mathbb{Q} = \{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m \neq 0 \}$

In $\mathbb{Q}$ la somma gode delle stesse proprietà viste in $\mathbb{Z}$.
Inoltre in $\mathbb{Q}$ il prodotto è <u>associativo</u>, <u>commutativo</u>,
- <u>distributivo</u>: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
- <u>elemento neutro</u>: vi è un numero particolare, l'<u>uno</u> 1, tale che $a \cdot 1 = a$, $\forall a \in \mathbb{Q}$
- <u>inverso</u>: per ogni numero razionale $a \neq 0$ esiste un altro numero, detto suo inverso e indicato con a^{-1} oppure $1/a$, tale che $a \cdot a^{-1} = 1$.

<u>Oss 3</u> Come nell'Oss 2, molte altre proprietà elementari seguono da quelle elencate sopra: ad esempio (1) da $a \cdot b = a \cdot c$ e $a \neq 0$ segue $b = c$, (2) l'elemento neutro 1 è unico, (3) l'elemento inverso di a è unico, (4) $(-a) \cdot b = -a \cdot b$, (5) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

<u>Oss 4</u> La <u>divisione</u>, o rapporto, è un'operazione secondaria definita da $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$ per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$.

Anche l'elevazione ad una potenza naturale è un'operazione secondaria: a^4 significa $a \cdot a \cdot a \cdot a$.

Anche in $\mathbb{Q}$ è semplice esibire equazioni senza soluzioni, come ad esempio: $x^2 = 2$. Infatti:

- L'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzione in $\mathbb{Q}$

dim

Supponiamo per assurdo che $x = \frac{n}{m}$, con $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$, risolva $x^2 = 2$. Dividendo n e m per il loro massimo comun divisore, possiamo supporre che n e m non abbiano fattori comuni (ossia la frazione è ridotta ai minimi termini).
Da $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$ segue $n^2 = 2m^2$ (*)
Per (*), n^2 è pari. Ma allora anche n è pari (il quadrato di un dispari è dispari), ossia $n = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Da (*) segue allora:
$(2k)^2 = 2m^2 \implies 4k^2 = 2m^2 \implies 2k^2 = m^2$.
Perciò anche m^2 è pari, da cui m è pari.
Questa è una contraddizione, dato che avevamo supposto che n e m non avessero fattori comuni $\square$

Es Sia $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che l'equazione

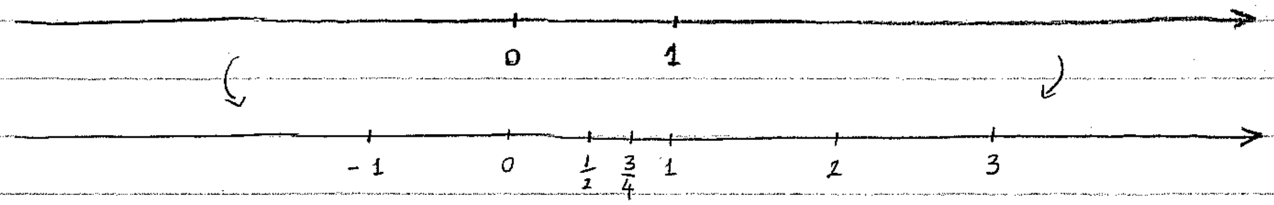
$$x^2 = n$$

ha soluzione $x \in \mathbb{Q}$ se e solamente se n è un quadrato, ossia $n = k^2$ con $k \in \mathbb{N}$.

Risulta molto utile disporre di un insieme di numeri dove l'equazione $x^2 = 2$ abbia soluzione, che indicheremo con $\sqrt{2}$. Si pensi ad esempio al problema di determinare la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1.

Questo insieme è l'insieme dei <u>numeri reali</u>: $\mathbb{R}$.

Costruire $\mathbb{R}$ è più complicato che costruire $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$ a partire da $\mathbb{N}$. Intuitivamente possiamo pensare ad $\mathbb{R}$ come ai punti su una retta ove siano stati segnati lo 0 e l'1:



Oppure alla forma decimale, in cui ad un numero intero aggiungiamo infinite cifre dopo la virgola (ma come sommare o moltiplicare tra loro 2 numeri siffatti?

Più formalmente, presentiamo $\mathbb{R}$ assiomaticamente, ossia enunciamo le sue proprietà. Naturalmente, occorrerebbe dimostrare che esiste un insieme con tali proprietà e che questo è unico. Lo studente interessato può vedere
[R. Courant - H. Robbins "Che cos'è la matematica?", Cap. II]
[O. Aleksandrovič Ivanov "Facile come π?", Cap. 10.]

<u>Assiomi di $\mathbb{R}$</u>

$\mathbb{R}$ è un insieme munito di <u>somma</u> e <u>prodotto</u> che soddisfano le proprietà già viste per $\mathbb{Q}$ e una relazione di <u>minore o uguale</u> ($\leq$) tra coppie di numeri che soddisfa:

- <u>Transitività</u>: $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$
- <u>Antisimmetria</u>: $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$
- <u>Dicotomia</u>: $\forall a, b$ risulta $a \leq b$ oppure $b \leq a$.

• Compatibilità con le operazioni algebriche : $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$
Se $0 \leq a$ e $0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a+b$ e $0 \leq a \cdot b$

• Completezza Siano A e B sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ risulta $a \leq b$. Allora esiste un numero $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq c \leq b$ $\forall a \in A, \forall b \in B$

Oss In effetti la transitività segue dalle altre proprietà. L'abbiamo esplicitata poiché una relazione transitiva e antisimmetrica si dice relazione d'ordine o ordinamento. Se vale anche la dicotomia, l'ordinamento si dice totale: la relazione di inclusione $\subseteq$ tra tutti i sottoinsiemi di un insieme fissato è un ordinamento non totale (se l'insieme fissato ha almeno 2 elementi).

Un insieme che gode di tutte le proprietà algebriche e di ordine sopra elencate, fino alla completezza esclusa, si dice campo ordinato: $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono campi ordinati.

L'assioma che distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$ è l'assioma di completezza: $\mathbb{Q}$ non è completo, come vedremo tra un attimo.

Relazioni derivate dal $\leq$

($\geq$) $a \geq b$ se $b \leq a$
($<$) $a < b$ se $a \leq b$ e $a \neq b$
($>$) $a > b$ se $a \geq b$ e $a \neq b$

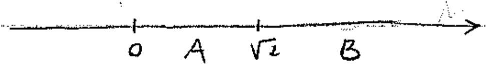
Proprietà elementari dell'ordine

- $a \leq b \iff b - a \geq 0$
- $a \geq 0 \iff -a \leq 0$
- $a \leq b$ e $c \geq 0 \implies ac \leq bc$
- $a \leq b$ e $c \leq 0 \implies ac \geq bc$

- Mostriamo che il campo ordinato $\mathbb{Q}$ non è completo.

Siano

$$A = \{ a \in \mathbb{Q} \mid a > 0,\ a^2 \leq 2 \} =]0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$$
$$B = \{ b \in \mathbb{Q} \mid b > 0,\ b^2 \geq 2 \} = [\sqrt{2}, +\infty[\cap \mathbb{Q}$$



Se $a \leq c \leq b$ $\forall a \in A$ e $\forall b \in B \implies c = \sqrt{2}$ e abbiamo già visto che $\sqrt{2}$ non è razionale. □

Intervalli

Un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se $x \leq y \leq z$ e $x, z \in I \implies y \in I$.

Gli intervalli possono essere limitati, ossia della forma

$[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$ chiuso
$]a,b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$ aperto
$[a,b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$ chiuso a sx aperto a dx
$]a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$ aperto a sx chiuso a dx

oppure illimitati, ossia della forma

$[a,+\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \}$ chiuso illimitato superiormente
$]a,+\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \}$ aperto illimitato superiormente
$]-\infty,a] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq a \}$ chiuso illimitato inferiormente
$]-\infty,a[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \}$ aperto illimitato inferiormente
$]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$

Disuguaglianza di Bernoulli

- $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geq -1$

dim

La dimostriamo per induzione su n. Per $n=0$ si riduce a $1 \geq 1$, che è vera. Supponiamola vera per n. Allora

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \underset{\substack{\text{ipotesi induttiva} \\ + \quad 1+x \geq 0}}{\geq} (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

Dunque abbiamo dedotto la disuguaglianza per $n+1$ $\square$

Es Depositiamo 1€ all'interesse composto dell'1% annuo. Mostrare che dopo 1000 anni avremo più di 1000€.

$S_0 = 1$ somma iniziale

$S_1 = 1 + \frac{1}{100}$ dopo 1 anno

$S_2 = S_1 + \frac{1}{100} S_1 = \left(1+\frac{1}{100}\right) S_1$ dopo 2 anni

e in generale

$$S_n = \left(1+\frac{1}{100}\right) S_{n-1} = \left(1+\frac{1}{100}\right)^n S_0 = \left(1+\frac{1}{100}\right)^n \quad \text{dopo } n \text{ anni}$$

$$S_{1000} = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{1000} = \left[\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}\right]^{10} \geq (1+1)^{10} = 2^{10} = 1024.$$

$\triangle$

Es Tra tutti i numeri di 8 cifre, ve ne sono più con o senza l'1 come cifra?

I numeri di 8 cifre vanno da $10000000 = 10^7$ a $99999999 = 10^8 -$

Sono quindi $10^8 - 1 - 10^7 + 1 = 10^8 - 10^7 = 10^7(10-1) = 9 \cdot 10^7$

I numeri di 8 cifre senza l'1 sono $8 \cdot 9^7$ (8 possibilità per la prima cifra, non potendo usare né l'1 né lo 0, 9 possibilità per ciascuna delle altre 7)

Il rapporto tra questi 2 numeri si stima

$$\frac{9 \cdot 10^7}{8 \cdot 9^7} = \frac{9}{8}\left(\frac{10}{9}\right)^7 = \frac{9}{8}\left(1+\frac{1}{9}\right)^7 \underset{\text{[Bernoulli]}}{\geq} \frac{9}{8}\left(1+\frac{7}{9}\right) = \frac{9}{8}\,\frac{16}{9} = 2$$

Quindi i numeri di 8 cifre senza l'1 sono meno della metà del totale: quelli con l'1 sono la maggioranza.

$\triangle$