21.5.2012

Formula di Stirling

Teorema $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

dim Useremo il seguente sviluppo

$$\log \frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\frac{1}{(2n+1)^{2k}} \qquad \forall n \geq 1 \qquad (*)$$

che abbiamo dimostrato il 27.3.2012.
Dobbiamo dimostrare che

$$a_n := \frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n$$

tende a $\sqrt{2\pi}$.
Iniziamo col dimostrare che a_n è decrescente e che il suo limite è un numero positivo.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\,\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)$$

$$= \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

Per $(*)$:

$$\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\frac{n+1}{n} = \frac{2n+1}{2}\,\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\frac{1}{(2n+1)^{2k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\frac{1}{(2n+1)^{2k}}$$

La somma di questa serie è maggiore di 1, poiché il termine con $k=0$ vale 1, e minore di

$$1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2k}} = 1+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}} =$$

$$= 1+\frac{1}{3((2n+1)^2-1)} = 1+\frac{1}{12n(n+1)} < 1+\frac{1}{n(n+1)}$$

Perciò

$$e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2} < e^{1+\frac{1}{n(n+1)}}$$

da cui

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{n(n+1)}} = e^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}} = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{1/n+1}}$$

La prima disuguaglianza mostra che a_n è decrescente, dunque $a_n \to A$ con $A \geq 0$.
La seconda disuguaglianza mostra che la successione $a_n e^{-1/n}$ è crescente.
Dato che $e^{-1/n} \to 0$, anche il limite di questa successione è A, che è pertanto un numero positivo.
Abbiamo quindi dimostrato che

$$n! \sim A\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{con } A>0 \quad (**)$$

Resta da mostrare che $A=\sqrt{2\pi}$. Calcoleremo A confrontando lo sviluppo del binomiale centrale $\binom{2n}{n}$ ricavabile da $(**)$ con quello dimostrato nell'ultima lezione:

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\, 2^{2n} \qquad (***)$$

Da (**):

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{A\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{A^2(\sqrt{n})^2\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{\sqrt{2}\ 2^{2n}}{A\sqrt{n}}$$

Per (***) deve risultare

$$\frac{\sqrt{2}\ 2^{2n}}{A\sqrt{n}} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{A} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow A = \sqrt{2\pi}.$$

$\square$

<u>Oss</u> La formula di Stirling può essere riscritta come

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}} \frac{e^n}{n^n} = 1,$$

da cui, applicando il logaritmo:

$$\log n! - \log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}\log n + n - n\log n = o(1)$$

ossia:

$$\log n! = n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + \log\sqrt{2\pi} + o(1)$$

che è uno sviluppo molto più preciso dello sviluppo

$$\log n! = n\log n - n + o(n)$$

dimostrato il primo semestre.

Integrale di una serie di potenze

Il seguente risultato mostra che le serie di potenze possono essere integrate termine a termine:

Teorema Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$. Allora la serie di potenze

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

ha ancora raggio di convergenza r e si ha
$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in]-r, r[.$$
Inoltre se $-r < a < b < r$ allora

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \, dx.$$

dim

Il raggio di convergenza di F è

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{\frac{|a_{k-1}|}{k}} = \lim_{n \to \infty} \sup_{k \geq n} \frac{\left(\sqrt[k-1]{|a_{k-1}|} \right)^{\frac{k-1}{k} \to 1}}{\underbrace{\sqrt[k]{k}}_{\to 1}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sup_{k \geq n} \sqrt[k-1]{|a_{k-1}|} = r$$

Per il teorema di derivazione delle serie di potenze:

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

per ogni $x \in]-r, r[$.
Dato che F è una primitiva di f, si ha

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = F(b) - F(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} b^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} a^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx$$

$\square$

<u>Esempi</u> 1) Integrando termine a termine la serie geometrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

si trova $-\log(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, che con la sostituzione $x = -y$ ci dà lo sviluppo di $\log(1+y)$.

2) Dalla serie geometrica di ragione $-x^2$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

otteniamo lo sviluppo dell'arcotangente:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

3) Dalla serie geometrica di ragione x^2

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

otteniamo: $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \int_0^x \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt =$

$$= \frac{1}{2}\Big[\log(1+t) - \log(1-t)\Big]_0^x = \frac{1}{2}\left(\log(1+x) - \log(1-x)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

$$e \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Dunque

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

4) La funzione $\frac{\sin x}{x}$ non possiede una primitiva esprimibile mediante funzioni elementari. Ciononondimeno possiamo usare il suo sviluppo in serie di potenze per calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

con la precisione desiderata:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}\, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{2^{2n+1} \cdot (2n+1) \cdot (2n+1)!}$$

Es (La funzione Γ)

Mostrare che per ogni $x>0$ l'integrale

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

è convergente.

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt \leq \int_0^1 t^{x-1}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\, dt < \infty$$

poiché $1-x<1$ (ossia $x>0$)

$$\frac{t^{x-1} e^{-t}}{e^{-t/2}} = t^{x-1} e^{-t/2} \longrightarrow 0 \quad \text{per } t \to +\infty$$

Quindi $t^{x-1} e^{-t} \leq e^{-t/2}$ per t suff. grande.
Dato che

$$\int_1^{\infty} e^{-t/2}\, dt = \lim_{c\to+\infty} \left[-2e^{-t/2}\right]_1^c = 2e^{-1/2}$$

la funzione $t^{x-1}e^{-t}$ è integrabile su $[1,+\infty[$)
per confronto.

Es a) $x\,\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \quad \forall x>0$
b) $\Gamma(1) = 1$
c) $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t}\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} t^x e^{-t}\, dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\left[-t^x e^{-t}\right]_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} x\, t^{x-1} e^{-t}\, dt \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} x \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} t^{x-1} e^{-t}\, dt = x\,\Gamma(x)$$

b) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{c\to\infty} \int_0^c e^{-t}\,dt =$

$= \lim_{c\to\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^c = \lim_{c\to\infty} \left(-e^{-c} + 1\right) = 1$

c) Per induzione. Se $n = 1$ segue da (b). Se vale per n, si ha per (a)

$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n\,(n-1)! = n!$ c.v.d. $\square$