22.5.2012

Lunghezza di curve

Una curva in $\mathbb{R}^2$ è un insieme della forma

$$\gamma = \{(x(t), y(t)) \mid t \in [a,b]\}$$

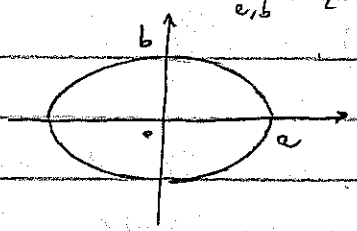
dove $x, y : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue.
Supponiamo che x e y siano derivabili con derivata continua e che l'applicazione $(x,y) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ sia iniettiva.
Allora definiamo la lunghezza di γ come

$$\ell(\gamma) := \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Qua $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ è la norma del vettore velocità $(x'(t), y'(t))$ e la formula dice che la lunghezza è l'integrale della velocità.

Esempi (1) Consideriamo l'ellisse

$$E_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}, \quad a,b>0$$



$E_{a,b}$ può essere parametrizzato da

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Quindi:

$$\ell(E_{a,b}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (b\cos t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt$$

Funzioni di questo tipo non possono essere integrate in modo elementare (si tratta di un « integrale ellittico »), tranne per particolari valori a, b.
Un caso semplice è dato dalla circonferenza $a = b = r$:

$$\ell(E_{r,r}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r .$$

2) Impostiamo il calcolo per la lunghezza dell'arco di parabola

$$\gamma = \left\{ \left(x, \frac{x^2}{2}\right) \mid 0 \leq x \leq a \right\}$$

$$\ell(\gamma) = \int_0^a \sqrt{1 + x^2}\, dx = (\text{sostituzione } x = \sinh u)$$

$$= \int_0^{\sinh^{-1} a} \sqrt{1 + \sinh^2 u}\, \cosh u = \int_0^{\sinh^{-1} a} \cosh^2 u\, du =$$

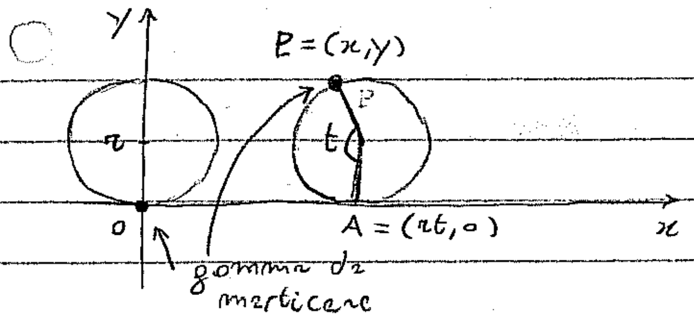
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\sinh^{-1} a} (1 + \cosh 2u)\, du = \frac{1}{2} \left[u + \frac{1}{2} \sinh 2u \right]_0^{\sinh^{-1} a} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[u + \sinh u \cosh u \right]_0^{\sinh^{-1} a}$$

Calcolando l'inversa di $\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$, troviamo

$$\ell(\gamma) = \frac{1}{2} \left(\log\left(a + \sqrt{1+a^2}\right) + a\sqrt{1+a^2} \right) .$$

3) Una bicicletta con ruote di raggio r percorre 10 Km. Determinare la forma e la lunghezza della curva descritta da una gomma da masticare attaccata al pneumatico.

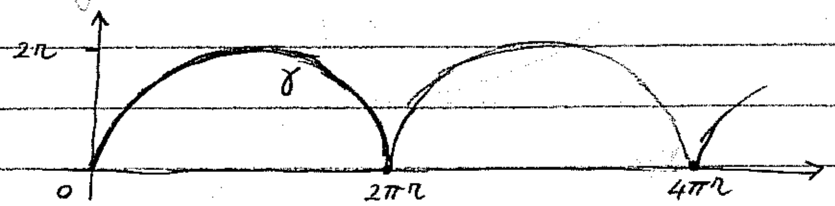


Quando la ruota ha compiuto un angolo t, la bicicletta si è spostata di una distanza pari alla lunghezza dell'arco $\widehat{AP}$, ossia rt.

Quindi la posizione $P = (x,y)$ della gomma è:

$$x(t) = rt - r\sin t = r(t - \sin t)$$
$$y(t) = r - r\cos t = r(1 - \cos t)$$

Questa curva si chiama <u>cicloide</u>:



Sia γ l'arco di cicloide parametrizzato da $t \in [0, 2\pi]$, corrispondente ad un giro completo della ruota.

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1-\cos t)^2 + r^2 \sin^2 t}\, dt =$$

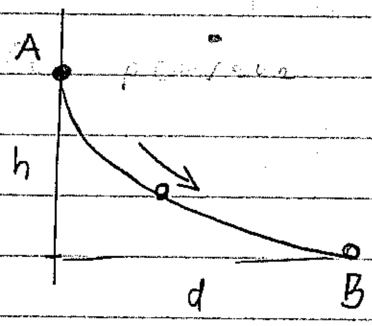
$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t}\, dt =$$

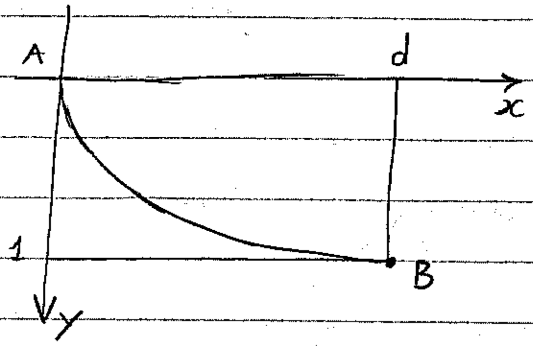
$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 2r\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\, dt = 2r\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt$$

$$= 2r\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8r$$

Mentre la ruota compie un giro, la bici percorre $2\pi r$, perciò la gomma percorre una curva di lunghezza pari $\frac{8r}{2\pi r} = \frac{8}{2\pi}$ volte la distanza percorsa della bici, ossia $\frac{80}{2\pi} \simeq 12,7$ Km

<u>Problema</u> Determinare la curva lungo la quale un corpo che scivola verso il basso senza attrito e sotto la forza di gravità, partendo da fermo in A, raggiunge B nel più breve tempo possibile.
La curva che realizza questo minimo si dice <u>brachisto-crona</u> "(curva del) tempo più corto".





Supponiamo $h = 1$ e posizioniamo gli assi coordinati come nella figura a destra

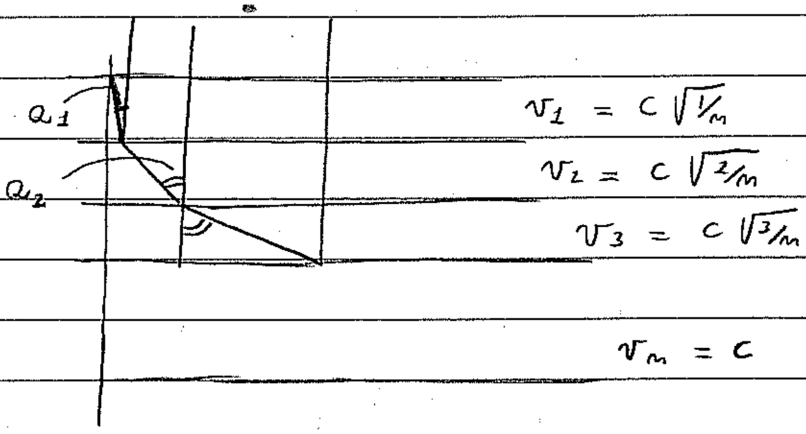
Sia $v(y)$ la velocità del corpo quando si trova a quota y. Alla stessa quota la sua energia potenziale è $-mgy$ (m = massa, g = accelerazione di gravità, il segno meno è dovuto al fatto che l'asse y punta verso il basso). L'energia totale è

$$\frac{1}{2} m\, v(y)^2 - mgy$$

che deve coincidere con l'energia totale posseduta dal corpo in posizione A, ossia 0 (infatti $v(y) = 0$ per $y = 0$).

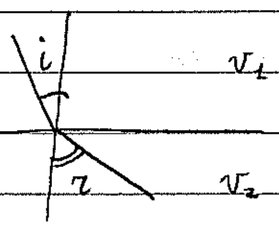
Perciò $v(y) = \sqrt{2gy} = c\sqrt{y}$ con $c := \sqrt{2g}$
e la velocità a quota y non dipende dalla traiettoria percorsa per raggiungere tale quota.

Discretizziamo il problema: suddividiamo lo spazio tra la quota 0 e la quota 1 in n intervalli di ampiezza $1/n$ e supponiamo che in ciascun intervallo la velocità sia costante: nell'intervallo $\frac{k-1}{n} < y \leq \frac{k}{n}$ vale $c\sqrt{\frac{k}{n}}$:



In ciascuna striscia, essendo la velocità costante, la curva che minimizza il tempo di percorrenza è un segmento. Passando da una striscia all'altra, la situazione è analoga a quella di un raggio di luce che attraversa due mezzi dove la velocità di propagazione è diversa. In questo caso il percorso più veloce è quello in cui gli angoli di incidenza i e di rifrazione r obbediscono alla legge dei seni:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$$



Detto a_K l'angolo che il K-esimo segmento forma con la verticale, si ha quindi

$$\frac{\sin a_{K-1}}{\sin a_K} = \frac{v_{K-1}}{v_K} = \frac{\cancel{c}\sqrt{\frac{K-1}{m}}}{\cancel{c}\sqrt{\frac{K}{m}}} \qquad \forall K = 2, \dots, m$$

ossia

$$\frac{\sin a_K}{\sqrt{K/m}} = \frac{\sin a_{K-1}}{\sqrt{(K-1)/m}}$$

Ciò mostra che la quantità

$$\frac{\sin a_K}{\sqrt{K/m}} = s \qquad \forall K = 1, 2, \dots, m$$

è un numero positivo s che non dipende da K.
Per $K = m$ si trova $\sin a_m = s$, quindi $s \in]0, 1[$.
Perciò a quota $\frac{K}{m}$ l'angolo tra la traiettoria e la verticale ha seno che vale $s\sqrt{K/m}$.

Tornando al modello continuo, deduciamo che a quota y l'angolo $a(y)$ della traiettoria con la verticale soddisfa

$$(*) \qquad \sin a(y) = s\sqrt{y} \qquad \forall y \in [0, 1]$$

Si tratta di trovare una curva che soddisfi questa proprietà e che passi per i punti A e B.
Scrivendo questa curva nella forma $y = f(x)$, si ha che $f'(x) = tg\left(\frac{\pi}{2} - a(y)\right) = \frac{1}{tg\, a(y)}$ e $(*)$ è equivalente a:

$$f'(x) = \frac{1}{tg\, a(f(x))} = \frac{\cos a(f(x))}{\sin a(f(x))} = \frac{\sqrt{1 - s^2 f(x)}}{s\sqrt{f(x)}}$$

ossia $$f'(x) = \sqrt{\frac{1 - s^2 f(x)}{s^2 f(x)}}\ , \quad f(0) = 0\ , \quad f(d) = 1$$

Possiamo risolvere questa equazione osservando che, dato che ci aspettiamo di trovare una soluzione $f(x)$ strettamente crescente, possiamo chiamare $g(y)$ la sua inversa e riscrivere il problema come:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \sqrt{\frac{s^2 y}{1 - s^2 y}}\ , \quad g(0) = 0\ , \quad g(1) = d$$

Perciò g è la primitiva di $\sqrt{\frac{s^2 y}{1 - s^2 y}}$ che vale 0 per $y = 0$, e il parametro s deve essere scelto in modo che tale primitiva valga d in $y = 1$.
Con la sostituzione $s^2 y = \sin^2 u$, da cui $s^2 dy = 2 \sin u \cos u \, du$, si calcola

$$\int \sqrt{\frac{s^2 y}{1 - s^2 y}}\, dy = \int \sqrt{\frac{\sin^2 u}{1 - \sin^2 u}}\, \frac{2}{s^2} \sin u \cos u \, du =$$

$$= \frac{2}{s^2} \int \sin^2 u \, du = \frac{1}{s^2} (u - \sin u \cos u) =$$

$$= \frac{1}{s^2} \left(\arcsin (s\sqrt{y}) - s \sqrt{y(1 - s^2 y)} \right)$$

ossia

$$\boxed{x = g(y) = \frac{1}{s^2} \left(\arcsin (s\sqrt{y}) - s \sqrt{y(1 - s^2 y)} \right)}$$

Si verifica facilmente che questa equazione rappresenta la cicloide $\begin{cases} x(t) = r\,(t - \sin t) \\ y(t) = r\,(1 - \cos t) \end{cases}$ con $r = \frac{1}{2 s^2}$

Quindi la curva brachistocrona è la cicloide.