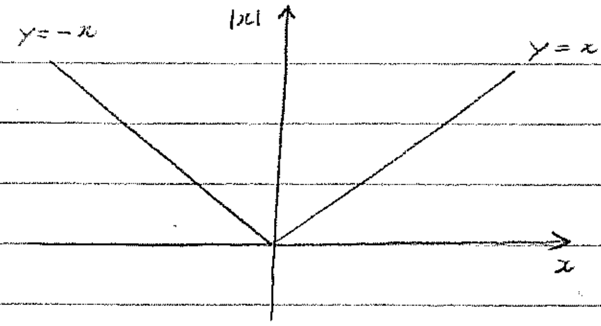
22.9.2011

La funzione valore assoluto



$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Proprietà elementari

- $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| = 0 \iff x = 0$
- $|-x| = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x \cdot y| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

- Se $r \geq 0$ risulta $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$

Infatti $|x| \leq r$ equivale ai 2 casi

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq r \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x < 0 \\ -x \leq r \end{cases}$$

Il primo caso si scrive come $0 \leq x \leq r$; il secondo $-r \leq x < 0$. Unendo i 2 casi si trova $-r \leq x \leq r$.

Analogamente: $|x| < r \iff -r < x < r$

$|x| \geq r \iff x \geq r$ oppure $x \leq -r$

$|x| > r \iff x > r$ oppure $x < -r$

- (Disuguaglianza triangolare) $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Infatti, dalle disuguaglianze ovvie $|x| \leq r$ con $r = |x|$ segue che $-|x| \leq x \leq |x|$. Sommando a queste le $-|y| \leq y \leq |y|$ si trova

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

che equivale a $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Es $|x - y| \geq ||x| - |y|| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Disuguaglianze

La <u>media aritmetica</u> tra 2 numeri reali a, b è il numero $\frac{a+b}{2}$. La <u>media geometrica</u> tra 2 numeri <u>non-negativi</u> a, b è il numero $\sqrt{ab}$.
Risulta:

$$\boxed{\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \qquad \forall a \geq 0, \ \forall b \geq 0}$$

Infatti, trattandosi di una disuguaglianza tra numeri non negativi, è equivalente dimostrare la stessa disuguaglianza tra i loro quadrati, ossia

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

che, svolgendo il quadrato di destra e moltiplicando ambo i membri per 4 diventa

$$ab \leq \frac{a^2+b^2+2ab}{4} \iff 4ab \leq a^2+b^2+2ab$$
$$\iff 0 \leq a^2+b^2-2ab \iff 0 \leq (a-b)^2$$

che è vera.

<u>Es 1</u> $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$ se $a, b \geq 0$

<u>dim</u>

Elevando al quadrato, le 2 disuguaglianze equivalgono a

$$a+b \leq a+b+2\sqrt{ab} \leq 2(a+b)$$

La prima disuguaglianza è vera poichè $\sqrt{ab} \geq 0$
La seconda equivale a $2\sqrt{ab} \leq a+b \iff \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$
ossia alla disuguaglianza aritmetico-geometrica. $\square$

<u>Es 2</u> $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$
e vale "=" $\iff a=b=c$.

<u>dim</u>

Da $(a-b)^2 \geq 0$ ricaviamo $a^2+b^2-2ab \geq 0$, ossia

$$a^2+b^2 \geq 2ab$$

Quindi $a^2+b^2 \geq 2ab$

$b^2+c^2 \geq 2bc$

$c^2+a^2 \geq 2ca$

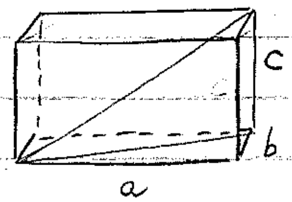
e sommando le 3 disuguaglianze

$2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ca)$, da cui la tesi □

<u>Es 3</u> Trovare il parallelepipedo di area totale massima tra tutti quelli con diagonale principale di lunghezza 1

<u>Sol</u>

Siano a, b, c le lunghezze degli spigoli del parallelepipedo. La diagonale principale è lunga $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$



L'area totale vale

$$A = 2(ab+bc+ca)$$

Per la disuguaglianza dell'esercizio 2 si ha:

$$A \leq 2(a^2+b^2+c^2) = 2$$

Quindi A è sempre ≤ 2 e vale $2 \iff a=b=c$ ossia nel caso del cubo di lato $1/\sqrt{3}$ □

<u>Disuguaglianza</u> <u>aritmetico-geometrica</u> (per n numeri)

Se $a_1, \dots, a_n \geq 0$ allora
$$\underbrace{\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{\frac{1}{n}}}_{\text{media geometrica}} \leq \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j}_{\text{media aritmetica}} \qquad \text{(A-G)}$$

Inoltre vale "=" se e solo se $a_1 = \dots = a_n = 0$

<u>Notazione</u> $\prod_{j=1}^{n} a_j = \prod_{1\leq j\leq n} a_j = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ <u>produttoria</u>

$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{1\leq j\leq n} a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ <u>sommatoria</u>

dim

Passo 1 La disuguaglianza A-G è vera per 2^k numeri.

Dimostriamolo per induzione su k.
Per $k = 1$, $2^k = 2$ e abbiamo già visto che (A-G) vale per 2 numeri.
Supponiamo che (A-G) valga per 2^k numeri e siano $a_1, \dots, a_{2^{k+1}}$ 2^{k+1} numeri non negativi.
Allora

$$\left(\prod_{j=1}^{2^{k+1}} a_j\right)^{\frac{1}{2^{k+1}}} = \left(\prod_{j=1}^{2^k} a_j\right)^{\frac{1}{2^{k+1}}}\left(\prod_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_j\right)^{\frac{1}{2^{k+1}}} \underset{(\text{A-G per } 2^k \text{ numeri})}{\leq} \left(\frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k} a_j\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2^k}\sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_j\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\underset{\left(\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)\right)}{\leq} \frac{1}{2}\frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^{k+1}} a_j = \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{j=1}^{2^{k+1}} a_j .$$

Il primo "≤" è un "=" $\iff a_1 = \dots = a_{2^k}$ & $a_{2^k+1} = \dots = a_{2^{k+1}}$
Il secondo "≤" è un "=" $\iff \sum_{1 \leq j \leq 2^k} a_j = \sum_{2^k+1 \leq j \leq 2^{k+1}} a_j$

In conclusione, vale "=" in AG $\iff a_1 = \dots = a_{2^{k+1}}$. Δ

Passo 2 Se $1 \leq n < m$ e (A-G) vale per m numeri, allora vale anche per n numeri.

Dati $a_1, \dots, a_n \geq 0$, sia A la loro media aritmetica e completiamoli ad una lista di m numeri aggiungendo $m-n$ numeri uguali ad A. Notiamo che la media aritmetica di questi m numeri è ancora A.
Siccome (A-G) vale per m numeri,

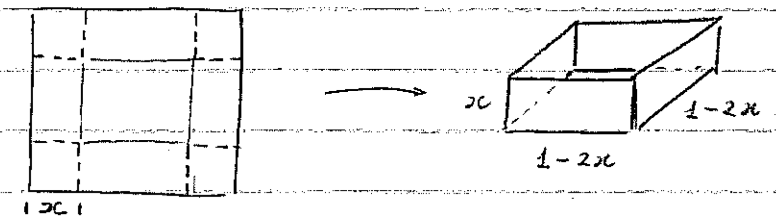
$$\left(A^{m-n}\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{\frac{1}{m}} \leq A$$

Elevando alla m e dividendo per A^{m-n}

$$\prod_{j=1}^{n} a_j \leq \frac{A^m}{A^{m-n}} = A^n$$

da cui $\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{\frac{1}{n}} \leq A$, c.v.d. □

<u>Es 4</u> Qual è il massimo volume di una scatola aperta costruita a partire da un cartone quadrato di lato 1 a cui ritagliamo 4 quadrati agli angoli?



$$V = x(1-2x)^2 = \frac{1}{4}\, 4x(1-2x)(1-2x) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{4x+1-2x+1-2x}{3}\right)^3$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{27}$$

Quindi il volume della scatola aperta non supera $\frac{2}{27}$ e vale $\frac{2}{27}$ se e solo se $4x = 1-2x$, ossia $x = \frac{1}{6}$ □