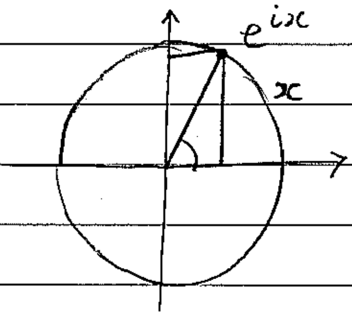
22. 11. 2011

Ancora numeri complessi

Come abbiamo visto la volta scorsa, se $x \in \mathbb{R}$ allora il numero complesso e^{ix} ha modulo 1 ed è il punto della circonferenza unitaria che si ottiene partendo da 1 e ruotando in senso antiorario di x radianti:



Quindi la parte reale di e^{ix} è il coseno di x, mentre la parte immaginaria di e^{ix} è il seno di x:

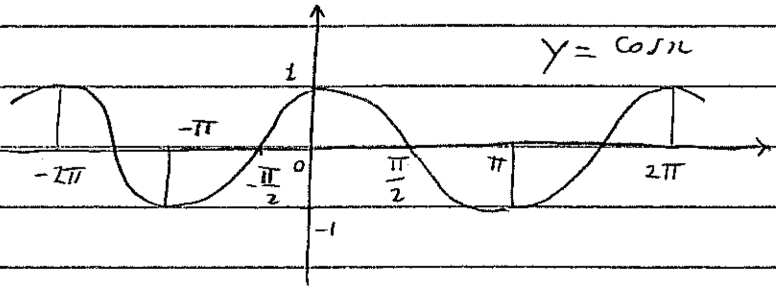
$$\mathrm{Re}\, e^{ix} = \cos x \quad , \quad \mathrm{Im}\, e^{ix} = \sin x$$

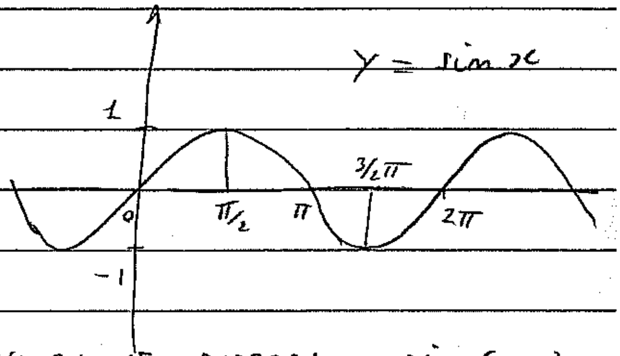
Possiamo riassumere queste identità scrivendo

(Formula di de Moivre) $\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$

Oss In effetti, un modo per definire analiticamente e non geometricamente le funzioni seno e coseno e il numero π è proprio tramite l'esponenziale complesso.

Qui $\cos x$ e $\sin x$ sono funzioni continue 2π-periodiche con grafici





FUNZIONE PARI: $\cos(-x) = \cos x$

FUNZIONE DISPARI: $\sin(-x) = -\sin x$

Es Trovare la formula di addizione per il coseno:
$\cos(x+y) = \ ?$

$$\cos(x+y) = Re\, e^{i(x+y)} = Re\left(e^{ix} e^{iy}\right) =$$

$$= \left(Re\, e^{ix}\right)\left(Re\, e^{iy}\right) - \left(Im\, e^{ix}\right)\left(Im\, e^{iy}\right) =$$

$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

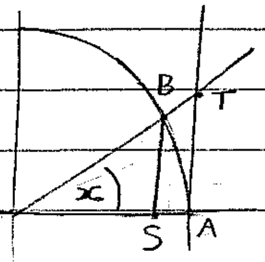
$$\Rightarrow \boxed{\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

Oss Tutte le formule trigonometriche possono essere dimostrate usando la formula di de Moivre e le proprietà dell'esponenziale complesso

- Limite importante: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

che si scrive anche come $\boxed{\sin x = x + o(x) \text{ per } x \to 0}$

Dimostrazione geometrica



$$\overline{BS} = \sin x$$
$$\widehat{AB} = x$$
$$\overline{AT} = \operatorname{tg} x$$

Per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ risulta $\sin x < x < \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$,

da cui, dividendo per $\sin x$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

e passando ai reciproci $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

Dato che $\cos x \to 1$ per $x \to 0$, dal teorema dei Carabinieri deduciamo che $\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$

Dato che $\frac{\sin x}{x}$ è una funzione pari (dispari. dispari = pari) anche il limite per $x \to 0-$ vale 1, da cui la tesi $\square$

Dimostrazione analitica Sappiamo che $e^z = 1 + z + o(z)$ per $z \to 0$. Scegliendo $z = ix$ con $x \in \mathbb{R}$ deduciamo che $e^{ix} = 1 + ix + o(x)$ per $x \to 0$
Prendendo la parte immaginaria
$$\sin x = x + o(x) \quad \text{per } x \to 0,$$
come volevasi dimostrare. $\square$

Interpretazione geometrica del prodotto di numeri complessi

Siano $w, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Come abbiamo visto, possiamo esprimere w e z come

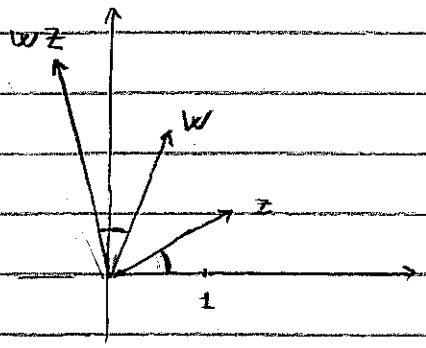
$$w = |w| e^{i \arg w} \quad , \quad z = |z| e^{i \arg z}$$

dove arg indica l'argomento di un numero complesso.
Allora

$$w \cdot z = |w| e^{i \arg w} |z| e^{i \arg z} = |w||z| e^{i(\arg w + \arg z)}$$

Quindi:

- il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli
- l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti.



Radici n-esime di un numero complesso

Sia $z \in \mathbb{C}$. $w \in \mathbb{C}$ è una radice n-esima di z se vale $w^n = z$.
Iniziamo con il determinare tutte le radici n-esime di 1.

$$w^n = 1 \Rightarrow |w^n| = 1 \Rightarrow |w|^n = 1 \Rightarrow |w| = 1$$

Quindi le radici n-esime di 1 hanno modulo 1 e pertanto sono della forma $w = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$

Allora $1 = w^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Ma questo vale se e solo se $n\theta$ è un multiplo intero di 2π:

$$n\theta = 2k\pi \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

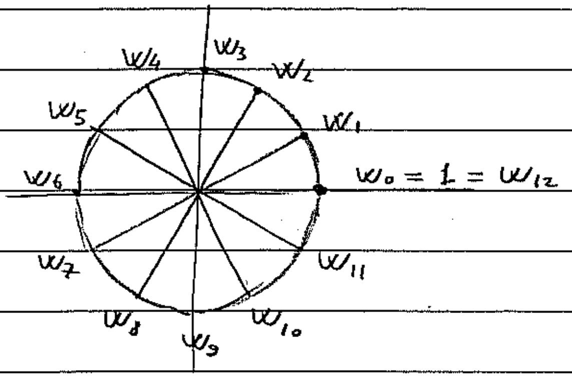
ossia

$$\theta = \frac{2k\pi}{n} \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Quindi le radici n-esime di 1 sono $w_1 = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ e tutte le sue potenze

$$w_k = w_1^k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$$

$n = 12$



Dopo n passi questi numeri si ripetono.
Le radici n-esime di 1 sono i vertici del poligono regolare con n lati inscritto che passa per 1.

- Perciò 1 ha esattamente n radici n-esime

$$\left\{ e^{\frac{2\pi k}{n}i} \mid k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

<u>Esempio</u> • 1 ha 4 radici quarte: $1, i, -1, -i$.

- Le radici seste di 1 sono: 1; $e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $e^{\frac{2}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $e^{\pi i} = -1$; $e^{\frac{4}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $e^{\frac{5}{3}\pi i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Sia ora $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Scriviamo z come $z = r e^{i\theta}$, con $r = |z| > 0$ e $\theta = \arg z \in \mathbb{R}$ (che possiamo scegliere in $[0, 2\pi[$, o anche in $]-\pi, \pi]$)

- Allora le radici n-esime di z sono gli n numeri:

$$\sqrt[n]{r}\, e^{i\theta/n}\, w_k \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

dove $w_k = e^{2\pi k/n\, i}$ sono le radici n-esime di 1

Infatti: $\left(\sqrt[n]{r}\, e^{i\theta/n}\, w_k\right)^n = r e^{i\theta} w_k^n = r e^{i\theta} = z$, dunque questi numeri sono radici n-esime di z

Inoltre $w^n - z$, pensato come polinomio in w, ha grado n e pertanto ha al più n radici

Es Determinare le radici quarte di $16i$.

sol

Le radici quarte di 1 sono $1, i, -1, -i$

$16i = 2^4 e^{i\pi/2}$ Quindi le radici quarte di $16i$ sono

$$2e^{i\pi/8}\, 1, \quad 2e^{i\pi/8}\, i, \quad -2e^{i\pi/8}, \quad -2e^{i\pi/8}\, i$$

Volendo esplicitare le parti reali e immaginarie di questi numeri, possiamo usare le formule di bisezione

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad 0 \leq x \leq 2\pi$$

Infatti $e^{i\pi/8} = \cos\frac{\pi}{8} + i \sin\frac{\pi}{8}$ e

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\pi/4}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\pi/4}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Quindi le radici quarte di $16\,i$ sono:

$$2e^{i\pi/8} = \sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}\; i$$
$$2e^{i\pi/8}\, i = \sqrt{2+\sqrt{2}}\; i - \sqrt{2-\sqrt{2}}$$
$$-2e^{i\pi/8} = -\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\; i$$
$$-2e^{i\pi/8}\, i = -\sqrt{2+\sqrt{2}}\; i + \sqrt{2-\sqrt{2}}$$