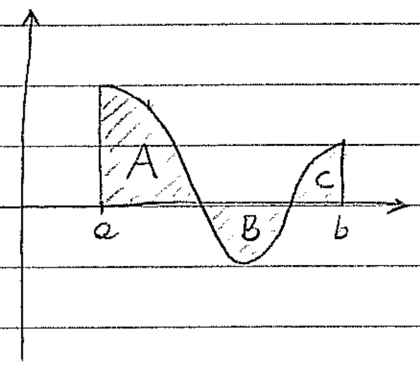
23.4.2012

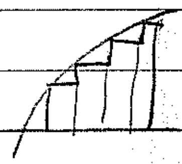
Integrale di Riemann

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. L'integrale di f su $[a,b]$ è la differenza tra l'area sottesa dal grafico di f ove questa è positiva e l'area sopra il grafico di f ove questa è negativa:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{integrale di } f \text{ su } [a,b]$$
$$= A - B + C$$

Le aree si definiscono approssimando con rettangoli



Rendiamo precisa questa definizione:

- Una suddivisione dell'intervallo $[a,b]$ è una $(n+1)$-upla di numeri reali $p = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ tale che $a = t_0 < t_1 < \dots t_{n-1} < t_n = b$, con $n \geq 1$. Indichiamo con $\mathcal{P}(a,b)$ l'insieme di tutte le suddivisioni di $[a,b]$.

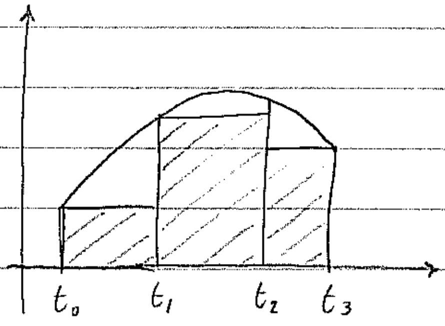
- Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata e $p \in \mathcal{P}(a,b)$, la somma di Riemann inferiore di f relativa alla suddivisione p è il numero

$$s(f,\mathcal{P}) = \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) \inf_{[t_j, t_{j+1}]} f$$

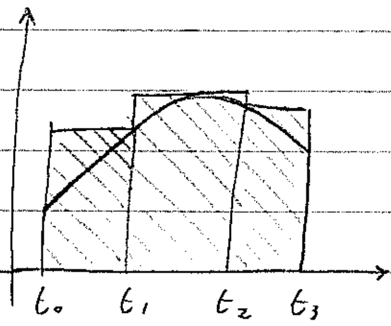
dove $p = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$.

La <u>somma di Riemann superiore</u> di f relativa alla suddivisione p è il numero:

$$S(f,P) = \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j) \sup_{[t_j, t_{j+1}]} f$$



$s(f,P)$



$S(f,P)$

Se $p, q \in \mathcal{P}$ sono tali che $p \subseteq q$, diciamo che la suddivisione q è <u>più fine</u> della suddivisione p.

<u>Proprietà</u>

1) Se $p = \{a, b\}$ è la suddivisione meno fine di tutte quelle in $\mathcal{P}(a,b)$, allora
$$s(f,p) = (b-a) \inf_{[a,b]} f \quad , \quad S(f,p) = (b-a) \sup_{[a,b]} f$$

2) Se $p \subseteq q$, ossia q è più fine di p, allora
$$s(f,p) \leq s(f,q) \quad , \quad S(f,p) \geq S(f,q)$$

Dimostriamo la prima disuguaglianza. Ragionando induttivamente, è sufficiente considerare il caso in cui q ha esattamente un elemento in più di p:

$$p = \{t_0 < \ldots < t_m\} \quad , \quad q = \{t_0 < \ldots < t_{m-1} < \bar{t} < t_m < \ldots < t_m\}$$

$$s(f,q) = \sum_{j=0}^{m-2} (t_{j+1} - t_j) \inf_{[t_j, t_{j+1}]} f + (\bar{t} - t_{m-1}) \inf_{[t_{m-1}, \bar{t}]} f +$$

$$+ (t_m - \bar{t}) \inf_{[\bar{t}, t_m]} f + \sum_{j=m}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) \inf_{[t_j, t_{j+1}]} f$$

Dato che $\displaystyle\inf_{[t_{m-1}, \bar{t}]} f \geq \inf_{[t_{m-1}, t_m]} f$ e

$$\inf_{[\bar{t}, t_m]} f \geq \inf_{[t_{m-1}, t_m]} f$$

possiamo minorare la somma dei 2 termini centrali nell'espressione sopra con

$$\underbrace{(\bar{t} - t_{m-1} + t_m - \bar{t})}_{\displaystyle \overset{\parallel}{t_m - t_{m-1}}} \inf_{[t_{m-1}, f]} f$$

Dunque

$$s(f,q) \geq s(f,p).$$

La disuguaglianza per S si dimostra in modo analogo, oppure può essere dedotta da quella per s e da:

3) $S(-f, p) = -s(f, p)$

Infatti $\displaystyle\sup_{[t_j, t_{j+1}]} (-f) = -\inf_{[t_j, t_{j+1}]} f$.

4) $s(f+g,p) \geq s(f,p) + s(g,p)$

$S(f+g,p) \leq S(f,p) + S(g,p)$

Infatti $\inf_{[t_j,t_{j+1}]} (f+g) \geq \inf_{[t_j,t_{j+1}]} f + \inf_{[t_j,t_{j+1}]} g$

$\sup_{[t_j,t_{j+1}]} (f+g) \leq \sup_{[t_j,t_{j+1}]} f + \sup_{[t_j,t_{j+1}]} g$

5) $\forall p,q \in \mathcal{P}$ risulta $s(f,p) \leq S(f,q)$

Nel caso particolare $p=q$ ciò segue da

$$\inf_{[t_{j-1},t_j]} f \leq \sup_{[t_{j-1},t_j]} f$$

Per il caso generale, osserviamo che la suddivisione $p \cup q$ è più fine di entrambe, dunque da 2):

$$s(f,p) \leq s(f,p\cup q) \leq S(f,p\cup q) \leq S(f,q).$$

Def.ne Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. L'integrale inferiore di f su $[a,b]$ è il numero

$$I^-(f,[a,b]) = \sup_{p\in\mathcal{P}(a,b)} s(f,p)$$

L'integrale superiore di f su $[a,b]$ è il numero

$$I^+(f,[a,b]) = \inf_{p\in\mathcal{P}(a,b)} S(f,p)$$

Dalle proprietà 1), 2) e 5) seguono le disuguaglienze

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f \leq I^-(f,[a,b]) \leq I^+(f,[a,b]) \leq (b-a)\sup_{[a,b]} f$$

Defn Una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ si dice integrabile secondo Riemann se è limitata e se

$$I^-(f,[a,b]) = I^+(f,[a,b])$$

Questo valore comune si dice integrale di f su $[a,b]$ e si indica con

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\sup_{[a,b]} f$$

L'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann su $[a,b]$ si indica con $\mathcal{R}(a,b)$.

Prop $\mathcal{R}(a,b)$ è uno spazio vettoriale e la funzione

$$\mathcal{R}(a,b)\to\mathbb{R},\quad f\mapsto\int_a^b f(x)\,dx$$

è lineare.

dim Sia $f\in\mathcal{R}(a,b)$. Se $\lambda\geq 0$, si ha

$$s(\lambda f,p)=\lambda s(f,p),\quad S(\lambda f,p)=\lambda S(f,p)$$

da cui

$$I^-(\lambda f,[a,b]) = \lambda I^-(f,[a,b]) = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$$

$$I^+(\lambda f,[a,b]) = \lambda I^+(f,[a,b]) = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$$

Dunque $\lambda f\in\mathcal{R}(a,b)$ e $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$

Inoltre, per la 3):

$$I^-(-f,[a,b]) = \sup_{p\in\mathcal{P}(a,b)} s(-f,p) = \sup_{p\in\mathcal{P}(a,b)} -S(f,p)$$

$$= -\inf_{p\in\mathcal{P}(a,b)} S(f,p) = -I^+(f,[a,b]) = -\int_a^b f(x)\,dx$$

e analogamente

$$I^+(-f,[a,b]) = -I^-(f,[a,b]) = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Perciò $-f \in \mathcal{R}(a,b)$ e $\int_a^b (-f(x))\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Mettendo assieme le due cose appena dimostrate, deduciamo che $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ la funzione λf appartiene a $\mathcal{R}(a,b)$ e $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

Siano ora $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siano p e q in $\mathcal{P}(a,b)$ tali che

$$s(f,p) \geq \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon$$

$$s(g,q) \geq \int_a^b g(x)\,dx - \varepsilon$$

Se $\pi \in \mathcal{P}(a,b)$ è più fine di entrambe, ad esempio $\pi = p \cup q$, si ha per 2)

$$s(f,\pi) \geq \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon$$

$$s(g,\pi) \geq \int_a^b g(x)\,dx - \varepsilon$$

Dalla 4) deduciamo che:

$$s(f+g,\pi) \geq s(f,\pi) + s(g,\pi) \geq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - 2\varepsilon$$

da cui

(A) $\quad I^-(f+g,[a,b]) \geq s(f+g,\pi) \geq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - 2\varepsilon$

Analogamente, si dimostra che

(B) $\quad I^+(f+g,[a,b]) \leq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx + 2\varepsilon$

Quindi

$$0 \leq I^+(f+g,[a,b]) - I^-(f+g,[a,b]) \leq 4\varepsilon$$

e dall'arbitrarietà di ε si ottiene $I^+(f,[a,b]) = I^-(f,[a,b])$

Da (A) e (B) segue che

$$\left| \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx - \left(\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\right) \right| \leq 2\varepsilon$$

da cui

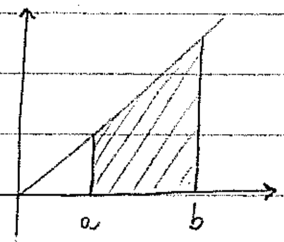
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$\square$

<u>Esempi</u>

1) $f(x) = 1 \quad \forall x \in [a,b]$. In questo caso
$s(1,p) = S(1,p) = (b-a)c \quad \forall p \in \mathcal{P}(a,b)$
Dunque $1 \in \mathcal{R}(a,b)$ e $\int_a^b 1\,dx = b-a$

2) $f(x) = x \quad \forall x \in [a, b]$.



L'area di questo trapezio è
$\frac{1}{2}$ (somma basi) · altezza $= \frac{1}{2}(a+b)(b-a)$
$= \frac{b^2 - a^2}{2}$

Sia p_m la suddivisione di $[a, b]$ in m intervalli uguali: $p_m = \{ t_0 < t_1 < \dots < t_m \}$ con
$$t_j = a + \frac{j}{m}(b-a)$$
Allora

$$s(f, p_m) = \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j) \inf_{[t_j, t_{j+1}]} f = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{b-a}{m}\left(a + \frac{j}{m}(b-a)\right)$$
$$= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{m^2} \sum_{j=0}^{m-1} j = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{m^2} \frac{m(m-1)}{2}$$
$$= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \frac{m-1}{m}$$

Quindi $I^-(f, [a,b]) \geqslant s(f, p_m) \geqslant a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \frac{m-1}{m}$

e dato che l'ultima quantità tende a
$$a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

deduciamo che $I^-(f, [a,b]) \geqslant \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

Un simile calcolo mostra che
$$S(f, p_m) = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \frac{m+1}{m}.$$
da cui
$$I^+(f, [a,b]) \leqslant \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$
Dato che $I^- \leqslant I^+$, concludiamo che $I^- = I^+ = \frac{b^2 - a^2}{2}$,
perciò x è integrabile e $\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$. $\square$