24. 4. 2012

3) Si consideri la seguente funzione $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, detta funzione di Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dato che ogni intervallo $[t_j, t_{j+1}]$, con $t_j < t_{j+1}$, contiene sia numeri razionali che irrazionali, risulta

$$\inf_{[t_j, t_{j+1}]} f = 0 \quad , \quad \sup_{[t_j, t_{j+1}]} f = 1$$

Quindi:

$$s(f, p) = 0 \quad , \quad S(f, p) = 1 \qquad \forall p \in \mathcal{P}(0,1)$$

da cui

$$I^-(f, [0,1]) = 0 < I^+(f, [0,1]) = 1$$

Perciò la funzione di Dirichlet <u>non è integrabile</u> secondo Riemann.

<u>Monotonia dell'integrale</u>

Se $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$ e $f \leq g$ allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Infatti $s(f,p) \leq s(g,p)$ $\forall p \in \mathcal{P}(a,b)$ e passando ai sup si ottiene la tesi.

<u>Criterio di integrabilità</u> Una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata è integrabile se e solamente se per ogni $\varepsilon>0$ esiste $p\in\mathcal{P}(a,b)$ tale che
$$S(f,p)-s(f,p)<\varepsilon.$$

<u>dim</u>

Supponiamo che $f\in\mathcal{R}(a,b)$. Allora $\exists\, p_0$ e p_1 in $\mathcal{P}(a,b)$ tali che
$$s(f,p_0)>\int_a^b f(x)\,dx-\frac{\varepsilon}{2}\ ,\quad S(f,p_1)<\int_a^b f(x)\,dx+\frac{\varepsilon}{2}$$

Allora, scelto $p=p_0\cup p_1$, si ha:
$$S(f,p)-s(f,p)\leq S(f,p_1)-s(f,p_0)<$$
$$<\int_a^b f(x)\,dx+\frac{\varepsilon}{2}-\left(\int_a^b f(x)\,dx-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon$$

dunque vale il criterio. Viceversa, se f soddisfa il criterio:
$$0\leq I^+(f,[a,b])-I^-(f,[a,b])\leq S(f,p)-s(f,p)<\varepsilon$$

e per l'arbitrarietà di ε, $I^+(f,[a,b])=I^-(f,[a,b])$. Dunque $f\in\mathcal{R}(a,b)$. $\square$

<u>Oss</u> $$S(f,p)-s(f,p)=\sum_{j=0}^{m-1}(t_{j+1}-t_j)\Big(\underbrace{\sup_{[t_j,t_{j+1}]}f-\inf_{[t_j,t_{j+1}]}f}_{=\ \sup_{x,y\in[t_j,t_{j+1}]}|f(y)-f(x)|}\Big)$$

Funzioni Lipschitziane

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. La funzione f si dice Lipschitziana se $\exists\, c > 0$ tale che

$$(*) \qquad |f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y| \qquad \forall x, y \in A.$$

Se f è Lipschitziana in A, allora è continua in A: infatti per ogni $x_0 \in A$ si ha

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c\,|x - x_0| \to 0 \quad \text{per } x \to x_0,$$

da cui $f(x) \to f(x_0)$ per $x \to x_0$.

Il viceversa non è vero: la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, non è Lipschitziana. Infatti

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty \quad \text{per } x \to 0+,$$

dunque il rapporto $\dfrac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|}$ assume valori arbitrariamente grandi e non può essere limitato, come invece richiede $(*)$.

Es Se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ possiede derivata limitata, allora f è Lipschitziana.

Infatti, $\forall x < y$ per il teorema di Lagrange esiste $z \in]x, y[$ tale che

$$f(y) - f(x) = (y - x)\, f'(z)$$

e $(*)$ vale con $c = \sup |f'|$.

Teorema Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e sia $g : A \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana il cui dominio A contenga $f([a,b])$. Allora la funzione $g \circ f$ è integrabile su $[a,b]$.

dim

Sia $c > 0$ tale che $|g(y) - g(x)| \leq c\,|y - x|$ $\forall x, y \in A$.
Fissiamo $\varepsilon > 0$. Dato che $f \in \mathcal{R}(a,b)$, per il criterio di integrabilità esiste $p \in \mathcal{P}(a,b)$ tale che

$$S(f,p) - s(f,p) < \frac{\varepsilon}{c}$$

Allora, usando l'osservazione dopo il criterio di integrabilità,

$$S(g\circ f, p) - s(g \circ f, p) = \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j) \sup_{x,y \in [t_j, t_{j+1}]} |g\circ f(y) - g \circ f(x)|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j) \sup_{x,y \in [t_j, t_{j+1}]} c\,|f(y) - f(x)|$$

$$= c\,(S(f,p) - s(f,p)) < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

Per il criterio di integrabilità, $g \circ f$ è integrabile. □

Oss Il teorema vale più in generale con g solamente continua. La dimostrazione richiede il concetto di funzione uniformemente continua.

Corollario 1 Se $f \in \mathcal{R}(a,b)$, allora anche $|f| \in \mathcal{R}(a,b)$ e risulta

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

dim

L'integrabilità di $|f|$ segue dal teorema precedente, dato che $g(t) = |t|$ è Lipschitziana.
Dalla disuguaglianza

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

segue che

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

che è equivalente alla disuguaglianza della tesi $\square$

Corollario 2 Se $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$ allora $fg \in \mathcal{R}(a,b)$

dim

Consideriamo il caso particolare $g = f$, ossia dimostriamo che se $f \in \mathcal{R}(a,b)$ allora $f^2 \in \mathcal{R}(a,b)$.
Dato che $f^2 = h \circ f$ con $h(t) = t^2$ e dato che h è Lipschitziana su $[\inf f, \sup f]$, f^2 è integrabile per il teorema.

Nel caso generale, si ha

$$fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2 \right)$$

Sappiamo già che $f+g \in \mathcal{R}(a,b)$. Allora anche $(f+g)^2, f^2, g^2 \in \mathcal{R}(a,b)$ da cui $fg \in \mathcal{R}(a,b)$ $\square$

Teorema Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

dim
La limitatezza di f è conseguenza del teorema di Weierstrass.
Mostreremo che f è integrabile sotto l'ipotesi supplementare che f sia Lipschitziana, ossia

$$|f(y) - f(x)| \leq c\,|y - x| \qquad \forall x, y \in [a,b].$$

Il caso generale di f solo continua richiede la nozione di uniforme continuità.
Fisso $\varepsilon > 0$. Sia $p = \{t_0 < \dots < t_m\} \in \mathcal{P}(a,b)$ una suddivisione tale che

$$t_{j+1} - t_j < \frac{\varepsilon}{c(b-a)} \quad \forall j = 0, \dots, m-1$$

Allora:

$$S(f,p) - s(f,p) = \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j) \sup_{x,y \in [t_j, t_{j+1}]} |f(y) - f(x)|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j) \sup_{x,y \in [t_j, t_{j+1}]} c\,|y - x| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j)\; c \cdot \frac{\varepsilon}{c\,(b-a)} = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

Dunque $f \in \mathcal{R}(a,b)$ $\square$