24.11.2011

Compattezza

Una sottosuccessione di una successione

$(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots)$

è la successione che si ottiene prendendo solamente alcuni termini, ma pur sempre infiniti, di (a_n). Ad esempio:

$(a_2, a_5, a_{22}, a_{100}, a_{101}, a_{3000}, \ldots)$

Più formalmente, una sottosuccessione è costruita componendo la successione data $a : \mathbb{N} \to X$, X insieme (ad esempio, $X = \mathbb{R}$), con una successione strettamente crescente $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$: $n \mapsto a(k(n))$.
Usando la notazione degli indici, $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$

Per esempio, (a_{2n}), (a_{3n}), (a_{n^2}) sono sottosuccessioni di (a_n).

- Se $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, allora ogni sottosuccessione di (a_n) tende a A.

Teorema (Bolzano-Weierstrass)
Sia $(x_n) \subset \mathbb{R}$ una successione limitata. Allora (x_n) possiede una sottosuccessione convergente.

Esempio $x_n = (-1)^n$ non converge. Però è limitata. Dunque possiede sottosuccessioni convergenti, per esempio $x_{2n} \equiv 1$, oppure $x_{2n+1} \equiv -1$.

dimostrazione 1 Per ipotesi, esistono numeri reali $a_0 < b_0$ tali che

$$a_0 \leq x_n \leq b_0 \quad \forall n \in \mathbb{R}$$

Divido l'intervallo $[a_0, b_0]$ nei due sottointervalli

$$\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right] \quad e \quad \left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$$

Uno almeno di questi due intervalli – indichiamolo con $[a_1, b_1]$ – contiene x_n per infiniti indici n. Risulta

$$a_0 \leq a_1 \quad , \quad b_1 \leq b_0 \quad , \quad b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$$

Faccio lo stesso con l'intervallo $[a_1, b_1]$: una delle sue due metà, che indichiamo con $[a_2, b_2]$, contiene x_n per infiniti indici n. Risulta

$$a_1 \leq a_2 \quad , \quad b_2 \leq b_1 \quad , \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{4}$$

Per induzione, costruiamo due successioni (a_j), (b_j) tali che

$$(a_j) \text{ crescente} \quad , \quad (b_j) \text{ decrescente} \quad , \quad b_j - a_j = \frac{b_0 - a_0}{2^j}$$

e $[a_j, b_j]$ contiene x_n per infiniti indici n

Per monotonia, (a_j) e (b_j) convergono e, dato che $b_j - a_j = \frac{b_0 - a_0}{2^j} \to 0$, il loro limite coincide: $\exists L \in \mathbb{R}$ tale che

$$a_j \to L \quad . \quad b_j \to L \qquad \text{per } j \to \infty$$

Poniamo $k_0 = 0$. Si ha $x_{k_0} = x_0 \in [a_0, b_0]$

Sia k_1 un intero maggiore di k_0 tale che $x_{k_1} \in [a_1, b_1]$: tale k_1 esiste, poiché

$x_n \in [a_1, b_1]$ per infiniti n.
Sia k_2 un intero $> k_1$ tale che $x_{k_2} \in [a_2, b_2]$. Induttivamente, troviamo $k_n > k_{n-1}$ tale che $x_{k_n} \in [a_n, b_n]$.
Dato che $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$, dal Teorema dei Carabinieri risulta $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = L$: (x_{k_n}) è la sottosuccessione convergente cercata. □

Alternativamente, si può dedurre il Teorema di Bolzano Weierstrass dal seguente lemma e dal fatto che le successioni monotone limitate convergono.

<u>Lemma</u> Ogni successione reale possiede una sottosuccessione monotona.

<u>dim</u>

Pensiamo a x_n come al record di salto in alto nell'anno n-esimo. Consideriamo l'insieme degli anni il cui record non verrà mai battuto:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid x_m \leq x_n \quad \forall m > n\}$$

Due possibilità: A è infinito oppure è finito.
Se è infinito, ossia se

$$A = \{n_0 < n_1 < n_2 < \dots\}$$

allora la successione (x_{n_j}) è decrescente: infatti da $n_j \in A$ segue che $x_m \leq x_{n_j}$ $\forall m > n_j$ e in particolare per $m = n_{j+1}$.
Se A è finito, ossia se $n < N$ $\forall n \in A$, allora il record realizzato in ciascun anno $n \geq N$ sarà battuto. In questo caso, costruiamo una sottosuccessione strettamente crescente: poniamo $n_0 = N$; dato che x_{n_0} sarà battuto, trovo $n_1 > n_0$ tale che $x_{n_1} > x_{n_0}$; dato che x_{n_1} sarà battuto, trovo $n_2 > n_1$ tale che $x_{n_2} > x_{n_1}$.
Induttivamente, trovo $n_k > n_{k-1}$ tale che $x_{n_k} > x_{n_{k-1}}$.
Quindi (x_{n_k}) è una sottosuccessione strett. crescente □

Massimi e minimi di funzioni continue

Ricordiamo che se $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione, allora
$$\sup_X f := \sup f(X) , \quad \max_X f := \max f(X)$$
ed idem per inf e min.
Se l'insieme $f(X)$ ha massimo, diciamo che f assume massimo su X. $\max\limits_X f$ è il massimo di f su X (o valore massimo), mentre gli $\bar{x} \in X$ tali che $f(\bar{x}) = \max\limits_X f$ si dicono punti di massimo.
Una funzione non ha massimo o se $\sup\limits_X f = +\infty$ oppure se il valore $\sup\limits_X f$ non è raggiunto: non esiste alcun $\bar{x} \in X$ tale che $f(\bar{x}) = \sup\limits_X f$

<u>Defn</u> $X \subset \mathbb{R}$ si dice <u>chiuso</u> se per ogni successione $(x_n) \subset X$ che converge, il limite è ancora un punto di X

<u>Esempi</u> $[a,b]$ è chiuso, $]a,b]$ non lo è. $\mathbb{R}$ e $[0,+\infty[$ sono chiusi, $]0,+\infty[$ non lo è.

<u>Teorema</u> (Weierstrass) Sia $X \subset \mathbb{R}$ un insieme <u>chiuso</u> e <u>limitato</u> e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione <u>continua</u>. Allora f possiede massimo e minimo.

<u>Oss</u> Tutte le ipotesi servono: la funzione $f(x) = x$ non ha massimo su $[0,1[$ (non è chiuso), e neppure su $[0,+\infty[$ (è chiuso ma non limitato).
La funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1-x & x \in]0,1[\\ 0 & x = 0 \end{cases}$ non ha massimo (non è continua).

dim Dimostriamo l'esistenza del massimo (per il minimo il ragionamento è analogo).
Sia

$$M = \sup_{x \in X} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Per definizione di estremo superiore, per ogni $L < M$ esistono $x \in X$ tali che $L < f(x) \leq M$.
Applicando questo fatto a $L = M - \frac{1}{n}$, trovo $x_n \in X$ tale che

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

da cui

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = M.$$

Dato che X è limitato, (x_n) è una successione limitata. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, (x_n) possiede una sottosuccessione (x_{n_k}) che converge ad un certo $\bar{x} \in \mathbb{R}$.
Dato che X è chiuso, $\bar{x} \in X$.
Dato che f è continua, da $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \bar{x}$ segue che

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$$

Ma $\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = M$, poiché $(f(x_{n_k}))$ è una sottosuccessione di $(f(x_n))$. Allora

$$f(\bar{x}) = M = \sup_{x \in X} f(x),$$

da cui $M \in \mathbb{R}$ ed è il massimo di $f(X)$ □