26.03.2012

Serie di potenze

Una serie di potenze è una serie della forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Agli esempi visti il 19.03.2012 aggiungiamo il seguente:

Esempio $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

Per ogni $x \neq 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} n!\,|x|^n = +\infty$, quindi per $x \neq 0$ il termine generale della serie non è infinitesimo.
Perciò questa serie di potenze converge solo per $x = 0$.

Questo e gli esempi visti il 19.03 suggeriscono il seguente risultato generale

Teorema (Dominio di convergenza di una serie di potenze)
Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{R}$, una serie di potenze.
Allora esiste $r \in [0, +\infty]$ tale che se $|x| < r$ la serie converge assolutamente, mentre se $|x| > r$ la serie non converge.
Il numero r, che si dice raggio di convergenza della serie, è determinato dalla formula:

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Quindi ogni serie di potenze converge (addirittura assolutamente) per x in un intervallo della forma $]-r, r[$. Nel caso $r = +\infty$ si ha convergenza (assoluta) su tutto $\mathbb{R}$, nel caso $r = 0$ solo in $x = 0$.

Quando $0 < r < +\infty$, la serie può convergere oppure no per $x = r$ e $x = -r$. Quando si ha convergenza in questi punti, questa può essere assoluta oppure no.
Gli esempi studiati mostrano che per $x = \pm r$ tutte queste possibilità possono verificarsi.

dim

Sia $L := \lim_{m \to +\infty} \sup_{k \geq m} \sqrt[k]{|a_k|}$.

Dato che la successione $\left(\sup_{k \geq m} \sqrt[k]{|a_k|}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ è decrescente,

il limite sopra esiste, quindi $L \in [0, +\infty]$ è ben definito e vale

$$L = \inf_m \sup_{k \geq m} \sqrt[k]{|a_k|}$$

(il caso $L = +\infty$ si verifica quando $\sup_{k \geq m} \sqrt[k]{|a_k|} = +\infty$ per ogni m, equivalentemente per almeno un m)

Consideriamo il caso $0 < L < +\infty$ e mostriamo che la serie converge assolutamente per $|x| < r := \frac{1}{L}$ e non converge per $|x| > r$.
Se $|x| < r$, scelto M tale che $|x| < \frac{1}{M} < r$ si ha $M > L$, da cui

$$\sup_{k \geq m} \sqrt[k]{|a_k|} \leq M \quad \text{per } m \text{ suff. grande}$$

ovvero

$$\sqrt[m]{|a_m|} \leq M, \qquad \forall m \geq m_0,$$

ossia

$$|a_m| \leq M^m, \qquad \forall m \geq m_0$$

Allora

$$|a_m x^m| = |a_m||x|^m \leq M^m |x|^m = (M|x|)^m \qquad \forall m \geq m_0$$

Dato che $M|x| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ converge per confronto con la serie geometrica di ragione $M|x|$. Questo mostra che la serie data converge per $|x| < r$

Se $|x| > r$, ovvero $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{r} = L$, si ha

$\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|} \geq \frac{1}{|x|}$ per ogni n, da cui

$\sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{|x|}$ per infiniti n. Per tali n vale dunque

$|a_n||x|^n \geq 1$, perciò il termine generale della serie data non è infinitesimo. Questo mostra che la serie non converge per $|x| > r$.

Consideriamo il caso $L = 0$ e mostriamo che la serie converge assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$.
Sia $x \in \mathbb{R}$. Dal fatto che $\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|}$ è infinitesimo segue che

$$\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{|x|+1} \quad \text{definitivamente}$$

ossia $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{|x|+1}$, $\forall n \geq n_0$. Perciò

$$|a_n x^n| = |a_n| |x|^n \leq \left(\frac{1}{|x|+1}\right)^n |x|^n = \left(\frac{|x|}{|x|+1}\right)^n \quad \forall n \geq n_0$$

Dato che $\frac{|x|}{|x|+1} < 1$, la serie data converge assolutamente per confronto con la serie geometrica di ragione $\frac{|x|}{|x|+1}$.

Consideriamo infine il caso $L = +\infty$ e mostriamo che per ogni $x \neq 0$ la serie non converge.

Sia $x \neq 0$. Dal fatto che $\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|} = +\infty \ \forall n$ deduciamo che $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{|x|}$ per infiniti n.

Allora $|a_n x^n| = |a_n||x|^n \geq \left(\frac{1}{|x|}\right)^n |x|^n = 1$ per infiniti n, da cui $a_n x^n$ non è infinitesima e la serie non converge. $\square$

Oss E' anche possibile sviluppare una teoria delle serie di potenze a coefficienti complessi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad a_n \in \mathbb{C},$$

dove anche la variabile z assume valori complessi. In questo caso l'intervallo di convergenza $]-r, r[$ è rimpiazzato dal disco di convergenza

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$$

Derivabilità delle serie di potenze

La somma di una serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

di raggio di convergenza $r > 0$ è una funzione definita su $]-r, r[$ (ed eventualmente anche in $x = -r$ o $x = r$). Quanto è regolare questa funzione?

La risposta è data dal seguente risultato:

Teorema Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$. Allora f è derivabile infinite volte in $]-r, r[$. Inoltre

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

e questa serie di potenze ha ancora raggio di convergenza r.

Posticipando la dimostrazione di questo teorema, vediamone alcune conseguenze.

Esempio 1 Vogliamo calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Dato che $\sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{3} \to \frac{1}{3} < 1$, questa serie converge per il criterio della radice n-esima.
Inoltre la somma di questa serie è $f(1/3)$, dove

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

Dato che $\sqrt[n]{n} \to 1$, questa serie di potenze ha raggio di convergenza 1. Questa serie sembra imparentata con la serie geometrica:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in]-1, 1[$$

Infatti:

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \quad \text{da cui} \quad x g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

Perciò $f(x) = x g'(x) = x\, D\left(\frac{1}{1-x}\right) = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$
da cui:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Esempio 2 Sappiamo che

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad \forall x \in [-1,1]$$

e che $$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \ \forall x \in]-1,1[$$

Questo è in accordo con $D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$. Infatti, se $x \in]-1,1[$:

$$D(\operatorname{arctg} x) = D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Si noti che la serie di potenze che esprime $\operatorname{arctg} x$ converge anche agli estremi dell'intervallo di convergenza, mentre quella della sua derivata no.

Esempio 3 Vogliamo calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$.

Si tratta di calcolare $h\left(\frac{1}{2}\right)$, dove $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$.

Dato che

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1,$$

questa serie ha raggio di convergenza 1. Inoltre, per $x \in]-1,1[$ si ha:

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

La funzione $\frac{1}{1-x}$ è anche la derivata di $f(x) = -\log(1-x)$

Fatto generale: se due funzioni f e h su un intervallo hanno la stessa derivata, allora differiscono per una costante.

Infatti $D(f-h) = f' - h' = 0$, dunque $f - h = \text{cost}$.

Nel nostro caso, deduciamo che $h(x)$ e $-\log(1-x)$ differiscono per una costante c.
Ma $h(0) = 0$ e anche $-\log(1-x)$ vale 0 per $x = 0$.
Concludiamo che $c = 0$, ossia

$$h(x) = -\log(1-x)$$

In particolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} = h\left(\frac{1}{2}\right) = -\log\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log 2$$

<u>dimostrazione</u> (del Teorema sulla regolarità delle serie di potenze)

<u>Passo 1</u> $\forall s < r$, la funzione $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è limitata in $[-s, s]$.
Infatti, se $x \in [-s, s]$,

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| s^n$$

che è una quantità finita poiché la serie di potenze converge assolutamente per $x = s \in]-r, r[$.

<u>Passo 2</u> f è continua in 0.

Infatti $f(0) = a_0$ e

$$|f(x) - f(0)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right| =$$

$$= |x| \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}\right| = |x| \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n\right| \overset{(\text{Passo 1})}{=} |x| \, O(1)$$

che è un infinitesimo per $x \to 0$.

Passo 3 f è derivabile in 0 e $f'(0) = a_1$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n \to a_1$$

per $x \to 0$, per il Passo 2.

Passo 4 La serie $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ ha raggio di convergenza r.

Infatti: $$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \sqrt[k]{(k+1)|a_{k+1}|} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \sqrt[k]{|a_k|} = r$$

poiché $\sqrt[k]{k+1} \to 1$.

Passo 5 Se $x \in \,]-r, r[$, $f(x+u)$ è somma di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n$ con raggio di convergenza $\geq s$

$$f(x_0+u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+u)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} u^k \qquad (*)$$

Se $|u| < s$, risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} |u|^k = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|x|+|u|)^n < +\infty$$

poiché $|x|+|u| < r$ e le serie di potenze convergono assolutamente all'interno dell'intervallo di convergenza. Dato che nelle serie assolutamente convergenti è possibile scambiare l'ordine degli addendi ed associarli, $(*)$ implica

$$f(x_0+u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} x^{n-k} \right) u_k$$

Quindi vale $f(x_0+u) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k$, con

$$b_k := \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} x^{n-k}$$

ben definito, ancora per la convergenza assoluta di (*)

<u>Conclusione</u> Per i passi 5 e 3, f è derivabile in ogni $x \in]-r, r[$ e vale

$$f'(x) = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \binom{n}{1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

come volevasi dimostrare. Dato che per il passo 4 f' è ancora una serie di potenze con raggio di convergenza r, iterando troviamo che f è derivabile infinite volte in $]-r, r[$. $\square$