27.3.2012

Es 1 Quanto deve essere grande k affinché $\sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ disti da $\log 2$ meno di $\frac{1}{100}$

1° Modo Per la Formula di Taylor con resto di Lagrange

$$\log 2 - \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{1}{(k+1)!} D^{k+1} \log(1+x)\Big|_{x=y} \cdot 1^{k+1}$$

con $0 < y < 1$. Dato che $D^h \log(1+x) = (-1)^{h-1}(h-1)! \frac{1}{(1+x)^h}$ si ha

$$\left| \log 2 - \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \frac{1}{(k+1)!} k! \frac{1}{(1+y)^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \frac{1}{1+y} < \frac{1}{k+1}$$

Questo numero è $\leq \frac{1}{100}$ se $k+1 \geq 100 \iff \boxed{k \geq 99}$

2° Modo Sia $S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

Sappiamo che $S_{2h} < \log 2 < S_{2h-1} \quad \forall h \geq 1$

Quindi $\log 2$ dista da S_{2h-1} meno di

$$S_{2h-1} - S_{2h} = -(\text{termine } 2h\text{-esimo}) = \frac{1}{2h}$$

Questo numero è $\leq \frac{1}{100}$ se $h \geq 50$. Quindi $S_{2h-1} = S_{99}$ dista da $\log 2$ meno di $\frac{1}{100}$.

- Metodo migliore per calcolare i logaritmi:

Partiamo dalle identità $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

$\forall x \in]-1,1[$

e $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$

Sottraendo dalla prima la seconda:

$$\log(1+x) - \log(1-x) = 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ dispari}}}^{\infty} \frac{1}{m} x^m$$

ossia $\forall x \in]-1,1[$

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} x^{2m+1} = 2x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} x^{2m}$$

Posto $x = \frac{1}{2k+1}$ con $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, si ha

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{2k+1+1}{2k+1} \cdot \frac{2k+1}{2k+1-1} = \frac{2(k+1)}{2k} = \frac{k+1}{k}$$

Dunque (*) $\boxed{\log \frac{k+1}{k} = \frac{2}{2k+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \frac{1}{(2k+1)^{2m}}}$ $\forall k \geq 1$

In particolare, per $k = 1$: $\log 2 = \frac{2}{3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \cdot \frac{1}{3^{2m}}$

Quanto velocemente converge questa serie?

$$\sum_{m=h}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \frac{1}{3^{2m}} \leq \frac{1}{2h+1} \sum_{m=h}^{\infty} \frac{1}{3^{2m}} = \frac{1}{2h+1} \frac{3^{-2h}}{1-3^{-2}} = \frac{1}{2h+1} \frac{9}{8} \cdot 3^{-2h}$$

Ad esempio, per $h = 10$

$$\left| \log 2 - \frac{2}{3} \sum_{m=0}^{9} \frac{1}{2m+1} \frac{1}{3^{2m}} \right| = \frac{2}{3} \sum_{m=10}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \frac{1}{3^{2m}} \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{21} \cdot \frac{9}{8} \cdot 3^{-20}$$

$$= \frac{1}{28} 3^{-20} \sim 10^{-11}$$

Questa convergenza è molto più veloce della precedente: con soli 9 termini raggiungiamo una precisione di 10^{-11}, mentre prima con 99 termini si arrivava a 10^{-2}.

Es 2 Determinare raggio di convergenza e somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

E' della forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con $a_n = \frac{n}{n+1} \frac{1}{3^n}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+1}} \frac{1}{3} \to \frac{1}{3}$$

Perciò il raggio di convergenza è 3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+1} \left(\frac{x}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{3}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{3}{3-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{3}{x} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{3}\right)^{n+1}}_{f(x)}$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (n+1) \left(\frac{x}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{1}{3-x}$$

$$\Rightarrow f(x) = c - \log(3-x)$$

Per $x=0$ $f(0) = 0 = c - \log 3 \Rightarrow c = \log 3$

$$\Rightarrow f(x) = \log 3 - \log(3-x) = \log \frac{3}{3-x}$$

Quindi $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{3}{3-x} - \frac{3}{x} \log \frac{3}{3-x}$$

Es 3 Determinare il raggio di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

Formula di Stirling approssimata

Ricordiamo che $\log n! = n \log n - n + o(n)$ o, equivalentemente

$$n! = n^n e^{-n+o(n)}$$

(sviluppi trovati il primo semestre). Allora

$$\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{\sqrt[n]{n^n e^{-n+o(n)}}}{n} = \frac{n\, e^{-1+o(1)}}{n} = e^{-1+o(1)}$$

$$= \frac{1}{e} + o(1)$$

Quindi il raggio di convergenza della serie è e