27.9.2011

Massimo e minimo di un insieme

Def Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Il massimo di A è il più grande fra gli elementi di A. Viene indicato con max A.

Dunque max A è caratterizzato dalle proprietà:
1) $\max A \in A$
2) $\forall a \in A$ risulta $a \leq \max A$

Analogamente, il minimo di A è il più piccolo tra gli elementi di A e viene indicato con min A.
E' caratterizzato da: 1) $\min A \in A$
2) $\forall a \in A$ risulta $a \geq \min A$

Esempi • $\max [0,1] = 1$, $\min [0,1] = 0$
• $\min \mathbb{N} = 0$, $\mathbb{N}$ non possiede massimo
• $\max]0,1] = 1$, ma $]0,1]$ non possiede minimo
• Sia $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots\}$
$\max A = 1$, ma A non possiede minimo.

Funzioni

Def Siano A e B due insiemi. Una funzione (o applicazione) $f: A \to B$
è una regola che a ciascun elemento $a \in A$ associa un elemento di B, che indichiamo con $f(a)$.
A si dice dominio di f, B codominio di f.
L'insieme dei valori assunti da f, ossia
$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

si dice *immagine* della funzione f.

Il *massimo* di una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ è il più grande valore assunto da f, ossia il massimo dell'immagine di f:

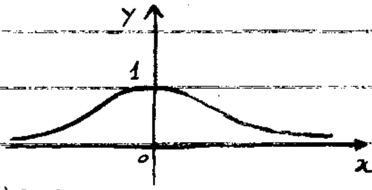
$$\max_{a \in A} f(a) = \max_A f := \max f(A)$$

Analogamente, $\min_{a \in A} f(a) = \min_A f := \min f(A)$

Esempi

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1|$ ha minimo 0 e non ha massimo. Il valore minimo 0 è assunto da $x = 1$, che si dice *punto di minimo*.

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.



$\max_{\mathbb{R}} f = 1$, f non possiede minimo.

Insiemi limitati

Def $A \subset \mathbb{R}$ si dice *limitato superiormente* se $\exists\, b \in \mathbb{R}$ tale che $\forall a \in A$, $a \leq b$. Tali numeri b si dicono *maggioranti* di A.

$A \subset \mathbb{R}$ si dice *limitato inferiormente* se $\exists\, b \in \mathbb{R}$ tale che $\forall a \in A$, $a \geq b$. Tali numeri b si dicono *minoranti* di A.

$A \subset \mathbb{R}$ si dice *limitato* se è limitato superiormente e inferiormente.

Oss Tali definizioni si estendono alle funzioni a valori reali, considerando l'immagine.

Es • $[0,1]$, $]0,1]$ e $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ sono insiemi limitati.
• $\mathbb{N}$ è limitato inferiormente, ma non superiormente
• $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1|$, è una funzione limitata inferiormente ma non superiormente.
• $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ è una funzione limitata.

• $A \subset \mathbb{R}$ è limitato se e solo se $\exists\, b \geq 0$ tale che $\forall a \in A \quad |a| \leq b$.

Estremo superiore e inferiore

Defn Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente e non vuoto. Il minimo dei suoi maggioranti si dice estremo superiore di A e si indica con $\sup A$. Quindi

$$\sup A := \min \{ b \in \mathbb{R} \mid b \geq a \quad \forall a \in A \}$$

Qui il punto fondamentale è che l'insieme dei maggioranti di un insieme $A \neq \emptyset$, quando è non vuoto (ossia quando A è limitato superiormente), possiede sempre minimo.

Questo fatto segue dall'assioma di completezza di $\mathbb{R}$: sia infatti B l'insieme dei maggioranti di A. Risulta quindi

$$\forall a \in A \text{ e } \forall b \in B, \quad a \leq b$$

Per l'assioma di completezza, $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall a \in A, \forall b \in B \qquad a \leq c \leq b.$$

La disuguaglianza $a \leq c$ ci dice che c è un maggiorante di A, ossia $c \in B$.
La disuguaglianza $c \leq b$ ci dice che c è il minimo di tali maggioranti.
Quindi $c = \min B$ è l'estremo superiore di A.

Analogamente, l'<u>estremo inferiore</u> di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente è il massimo dei suoi minoranti

$$\inf A := \max\{b \in \mathbb{R} \mid b \leq a \ \forall a \in A\}$$

<u>Notazione</u> Se A non è limitato superiormente, si pone

$$\sup A := +\infty$$

mentre se A non è limitato inferiormente, si pone

$$\inf A := -\infty$$

<u>Oss</u> Queste definizioni si estendono alle funzioni $f: A \to \mathbb{R}$ considerando l'immagine:

$$\sup_{a \in A} f(a) = \sup_A f := \sup f(A)$$

$$\inf_{a \in A} f(a) = \inf_A f := \inf f(A)$$

- Le considerazioni di sopra, assieme alla notazione per gli insiemi illimitati, ci permettono di concludere che, diversamente da max e min, sup e inf esistono sempre.

Se non avessimo avuto l'assioma di completezza, ad esempio se lavorassimo su $\mathbb{Q}$, questo non sarebbe vero: $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x, x^2 < 2\}$ non ha sup in $\mathbb{Q}$.

Esempi

- $\sup [0,1] = 1 = \max [0,1]$, $\inf [0,1] = 0 = \min [0,1]$
- $\sup \mathbb{N} = +\infty$, $\inf \mathbb{N} = 0 = \min \mathbb{N}$
- $\inf \,]0,1] = 0$
- $\inf \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \} = 0$

- Sia $A \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente. Allora $L = \sup A$ se e solo se (1) $L \geq a \;\; \forall a \in A$
  (2) $\forall M < L \;\; \exists a \in A$ t.c. $a > M$

  Infatti, (1) dice che L è un maggiorante di A, (2) dice che ciascun numero minore di L non lo è, dunque L è il minimo dei maggioranti.
  Spesso la (2) viene riscritta nella forma
  (2') $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists a \in A$ t.c. $a > L - \varepsilon$.

Es Scrivere l'analoga caratterizzazione per $\inf A$.

Proprietà di Archimede Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$.

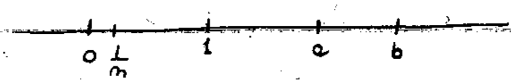
Ossia, $\sup \mathbb{N} = +\infty$. Altrimenti, $M = \sup \mathbb{N}$ sarebbe un numero reale. Dato che M è un maggiorante di $\mathbb{N}$, $n \leq M \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. In particolare $n + 1 \leq M \;\; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq M - 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Ma allora anche $M - 1$ è un maggiorante di $\mathbb{N}$, il che è assurdo perché $M = \sup \mathbb{N}$ è il minimo dei maggioranti.

Densità dei razionali Se $a < b$ allora esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $a < q < b$.

dim

Possiamo supporre $a > 0$ (il caso $a < 0 < b$ è banale, il caso $a < b < 0$ si riduce al caso $0 < a < b$ cambiando segno).

Sia $n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > \frac{1}{b-a}$



$\Rightarrow n(b-a) > 1$

Sia m il più piccolo naturale t.c. $m > na$. Allora

$$na < m = m-1+1 \underset{\uparrow}{\leq} na + 1 < na + n(b-a) = nb$$

m è il più piccolo naturale $> na$

Nella disuguaglianza sopra leggiamo

$$na < m < nb$$

$$\Rightarrow a < \frac{m}{n} < b \qquad \text{c.v.d.}$$

Successioni

Def.n Una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ si dice anche *successione* di numeri reali. Si usa spesso la notazione a_n al posto di $a(n)$ e si pensa ad a come ad un vettore con infinite componenti:

$$a = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$$

Esempi importanti

- $a_n = (0, 1, 2, 3, \dots)$, ossia $a_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- S_n = somma dei primi n interi positivi $= \sum_{j=1}^{n} j$, $S_0 = 0$

Possiamo esplicitare S_n:

primo modo: $2S_n = (1+2+\dots+n) + (n+(n-1)+\dots+1)$
$= n(n+1)$

da cui $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

secondo modo: Mostriamo per induzione che $\boxed{\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \geq 1}$

- per $n = 1$: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ ok
- se la formula vale per n, allora

$$\sum_{j=1}^{n+1} j = n+1 + \sum_{j=1}^{n} j = n+1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n+2+n^2+n}{2}$$

$$= \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

che è la formula per $n+1$ $\square$

- (x_n) definita induttivamente da $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + a & (1) \\ x_0 = b & (2) \end{cases}$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ (progressione aritmetica)

$(x_n) = (b, b+a, b+2a, b+3a, \dots)$

$\Rightarrow \quad x_n = b + na$

Infatti si verifica facilmente che $x_n = b + na$ soddisfa (1) e (2).

- (x_n) definita induttivamente da $\begin{cases} x_{n+1} = a \cdot x_n \\ x_0 = b \end{cases}$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ (progressione geometrica)

$(x_n) = (b, ab, a^2 b, a^3 b, \dots)$

Si verifica facilmente che $x_n = b \cdot a^n$ soddisfa entrambe le condizioni.

- Somma di una progressione geometrica $\quad S_n = \sum_{j=0}^{n} x^j$

Per $x = 1$ si ha $S_n = \sum_{j=0}^{n} 1 = n + 1$.

Ricaviamo la formula per $x \neq 1$ in due modi:

primo modo dalla formula

$(x-1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1) = x^{n+1} - \cancel{x^n} + \cancel{x^n} - \cancel{x^{n-1}} + \dots$
$+ x^2 - \cancel{x} + \cancel{x} - 1 = x^{n+1} - 1$

si ricava

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} x_j = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}} \qquad \forall x \neq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

secondo modo verificare la formula sopra per induzione.