28.2.2012

Formula di Taylor

Sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $x_0 \in]a,b[$. Allora sappiamo che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad \text{per } x \to x_0$$

Ossia, il polinomio di primo grado $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ approssima $f(x)$ con un errore di ordine $o(x-x_0)$ per $x \to x_0$.

Vorremmo generalizzare questo fatto ad ordini maggiori: dato $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, vorremmo trovare un polinomio di grado m,

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k (x-x_0)^k$$

tale che

$$f(x) = P_m(x) + o((x-x_0)^m) \quad \text{per } x \to 0$$

Ricordiamo che la derivata seconda di f, che si indica con f'' oppure $f^{(2)}$, è la derivata di $f' = f^{(1)}$. La derivata terza $f^{(3)}$ è la derivata di $f^{(2)}$ e, in generale, la derivata k-esima $f^{(k)}$ è la derivata di $f^{(k-1)}$. Il simbolo $f^{(0)}$ indica f.

Def Diciamo che f è derivabile m volte in x_0 se f è derivabile $m-1$ volte in un intervallo aperto che contiene x_0 e se $f^{(m-1)}$ è derivabile in x_0.

Iniziamo con il dimostrare il seguente:

<u>Lemma</u> Sia $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte in $x_0 \in]a,b[$, con

$$f(x_0) = f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$$

Allora

$$f(x) = o((x-x_0)^n) \qquad \text{per } x \to x_0$$

<u>dim</u>

Dimostriamo più in generale che

$$(*) \qquad f^{(n-k)}(x) = o((x-x_0)^k) \qquad \text{per } x \to x_0$$

se $1 \le k \le n$. Per $k = n$ si ha la tesi.

Induzione su k. Dato che $f^{(n-1)}$ è derivabile in x_0 si trova

$$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$
$$= o(x-x_0) \qquad \text{per } x \to x_0$$

ossia $(*)$ vale per $k = 1$.

Supponiamo che $(*)$ valga per $k \le n-1$. Per il Teorema di Lagrange:

$$f^{(n-(k+1))}(x) = f^{(n-k-1)}(x) - f^{(n-k-1)}(x_0) =$$
$$= f^{(n-k)}(x_0 + \theta(x-x_0)) \quad (x-x_0)$$

dove $\theta = \theta(x) \in]0,1[$. Dato che $(*)$ vale per k, l'ultima espressione vale

$$o((x_0 + \theta(x-x_0) - x_0)^k) \cdot (x-x_0) = o(\theta^k (x-x_0)^k)(x-x_0)$$
$$= o((x-x_0)^{k+1})$$

dunque $(*)$ vale per $k+1$. $\square$

Calcoliamo le derivate di $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k (x-x_0)^k$ nel punto x_0:

$$P(x_0) = a_0$$

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{m} k\, a_k (x-x_0)^{k-1}, \qquad P'(x_0) = a_1$$

$$P''(x) = \sum_{k=2}^{m} k(k-1)\, a_k (x-x_0)^{k-2}, \qquad P''(x_0) = 2a_2$$

$$P^{(3)}(x) = \sum_{k=3}^{m} k(k-1)(k-2)\, a_k (x-x_0)^{k-3}, \qquad P^{(3)}(x_0) = 3\cdot 2\cdot a_3$$

In generale per $h \leq m$

$$P^{(h)}(x) = \sum_{k=h}^{m} k(k-1)\dots(k-h+1)\, a_k (x-x_0)^{k-h}, \qquad \boxed{P^{(h)}(x_0) = h!\, a_h}$$

mentre $P^{(h)}(x) = 0$ per $h > m$

Mettendo assieme questo calcolo ed il lemma precedente, troviamo:

__Teorema__ (Formula di Taylor con resto di Peano)
Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile m volte in $x_0 \in]a,b[$. Allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^m)$$

per $x \to x_0$.

__dim__ Siano $P_m(x) := \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$ e

$g(x) := f(x) - P_m(x)$

Dato che $P_n^{(k)}(x_0) = k!\,\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = f^{(k)}(x_0)$

per ogni $k \in [0, n]$, si ha $g^{(k)}(x_0) = 0$ per ogni $k \in [0, n]$. Per il lemma deduciamo che $g(x) = o((x - x_0)^n)$ per $x \to x_0$, come volevasi dimostrare $\square$

<u>Esempi importanti</u>

1) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

$$f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k \in \mathbb{N} \implies f^{(k)}(0) = 1$$

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x = -f(x)$
$f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$

In generale

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x \implies f^{(2k)}(0) = 0$$
$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x \implies f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$$

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) \quad \text{per } x \to 0}$$

3) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$

$f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x = -f(x)$
$f'''(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x \implies f^{(2k)}(0) = (-1)^k$$
$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x \implies f^{(2k+1)}(0) = 0$$

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2m+1}) \quad \text{per } x \to 0}$$

4) $f(x) = \log(1+x)$, $x_0 = 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = 2\frac{1}{(1+x)^3}, \qquad f'''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -3\cdot 2\, \frac{1}{(1+x)^4} \qquad f^{(4)}(0) = -3!$$

In generale, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)! \quad \forall k \geq 1$

Usando anche $f(0) = 0$, troviamo

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^m) \quad \text{per } x \to 0}$$

5) $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x_0 = 0$, con $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad f'(0) = \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

In generale, $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$

Estendendo la notazione per i coefficienti binomiali

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N},\ k \neq 0$$

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

si trova

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0}$$

Si noti che per $\alpha \in \mathbb{N}$ e $n \geq \alpha$ la formula del binomio di Newton mostra che il resto $o(x^n)$ nell'espressione sopra è identicamente nullo.

Un caso particolare utile ($\alpha = -1$ e cambio di variabile $x \mapsto -x$) è la formula

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0}$$

Questa si dimostra anche direttamente:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} + o(x^n)$$