29.9.2011

Esercizi su sup, inf, max, min

Es 1 Determinare sup, inf e, se esistono, max e min dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{m}{10^n} \;\middle|\; m \in \{1,2,3,\dots,9\},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$A = \{ \underbrace{1,2,3,\dots,9}_{n=0}, \underbrace{\tfrac{1}{10}, \tfrac{2}{10}, \tfrac{3}{10}, \dots, \tfrac{9}{10}}_{n=1}, \underbrace{\tfrac{1}{100}, \tfrac{2}{100}, \dots, \tfrac{9}{100}}_{n=2}, \dots \}$$

Dunque:

- $\max A = \sup A = 9$: infatti 9 è un elemento di A ($m = 9$, $n = 0$) e per ogni scelta di m e n come nella definizione di A risulta

$$\frac{m}{10^n} \underset{\substack{\uparrow \\ m \leq 9}}{\leq} \frac{9}{10^n} \underset{\substack{\uparrow \\ 10^n \geq 1}}{\leq} 9$$

- $\inf A = 0$ ma A non possiede minimo: tutti gli elementi di A sono positivi $\Rightarrow$ 0 è un minorante di A. $\forall a > 0$ esiste un elemento di A minore di a, ad esempio $m = 1$ $\frac{1}{10^n} < a$ purché $10^n > \frac{1}{a} \iff n > \log_{10} \frac{1}{a}$.
Dunque 0 è il massimo dei minoranti, ossia inf A.
Però $0 \notin A$.

Es 2 Determinare sup, inf e, se esistono, max e min della successione $\left(\frac{n!}{n^n}\right)_{n \geq 1}$.

Per definizione, si tratta di determinare sup, inf, max e min dell'immagine della successione, ossia dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{n!}{n^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \right\}$$

Vediamone alcuni termini:

$$A = \left\{ 1, \ \frac{2!}{2^2} = \frac{1}{2}, \ \frac{3!}{3^3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}, \ \frac{4!}{4^4} = \dots, \ \dots \right\}$$

Dato che $n! = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}_{n \text{ termini}}$ e $n^n = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{n \text{ termini}}$,

si ha $n! \leq n^n$. Quindi $\frac{n!}{n^n} \leq 1$ e dato che $1 \in A$ deduciamo che $\max A = \sup A = 1$.

Affermiamo che $\inf A = 0$. Infatti

$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$$

, quindi $\forall a > 0$, scelto $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \frac{1}{a}$, risulta $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} < a$. Questo mostra che 0, che è ovviamente un minorante di A, è il massimo dei minoranti.

Però $0 \notin A$, quindi A non ha minimo.

<u>Es 3</u> Determinare sup, inf e, se esistono, max e min dell'insieme

$$A = \{ ab \mid a > 0, b > 0, a + b = 1 \}$$

Dalla disuguaglianza (A-G) segue che $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Quindi $1/4$ è maggiorante di A.

D'altra parte, per $a = b = \frac{1}{2}$ si ha $a+b = 1$ e $ab = \frac{1}{4}$, dunque $\frac{1}{4} \in A$. Concludiamo che $\max A = \frac{1}{4} = \sup A$.

Affermiamo che $\inf A = 0$. Infatti $\forall \varepsilon \in]0,1[$, scelti $a = \varepsilon$ e $b = 1 - \varepsilon$, si ha $a + b = 1$ e

$$ab = \varepsilon(1-\varepsilon) < \varepsilon \qquad \text{poiché } 1 - \varepsilon < 1$$

Questo mostra che nessun $\varepsilon > 0$ è un minorante, dunque 0, che lo è, coincide con $\inf A$.

Dato che $0 \notin A$, A non possiede minimo. Δ

Proprietà del sup e dell'inf

Nelle dimostrazioni che seguono, indichiamo con $M(A)$ l'insieme dei maggioranti dell'insieme $A \subset \mathbb{R}$ e con $m(A)$ l'insieme dei suoi minoranti.

1) $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$ e $\inf A \geq \inf B$

Infatti $A \subset B \Rightarrow M(B) \subset M(A)$. In particolare $\sup B$, che è il minimo di $M(B)$, appartiene anche a $M(A) \Rightarrow \sup A = \min M(A) \leq \sup B$.
Analogamente per gli inf. $\triangle$

2) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$
$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$

Dimostriamo la prima uguaglianza. A meno di scambiare A con B, possiamo supporre $\sup A \leq \sup B$ (*), e sotto questa ipotesi dobbiamo mostrare che $\sup(A \cup B) = \sup B$.
La disuguaglianza $\sup(A \cup B) \geq \sup B$ segue da (1).
La disuguaglianza $\sup(A \cup B) \leq \sup B$ equivale a dire che $M(B) \subset M(A)$, ma questo è vero per (*).

Oss 1 Lo stesso risultato vale per unioni di 3, 4, ... insiemi e anzi, anche per unioni di infiniti insiemi: se A_j, $j \in J$, è una collezione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ indicizzata su un insieme J (finito o infinito), risulta

$$\sup \bigcup_{j \in J} A_j = \sup\{\sup A_j \mid j \in J\}$$

__Notazione__ Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$ si definisce

$\lambda A := \{ \lambda a \mid a \in A \}$

$\lambda + A := \{ \lambda + a \mid a \in A \}$

$A + B := \{ a + b \mid a \in A, b \in B \}$

3) $\sup(\lambda + A) = \lambda + \sup A$, $\inf(\lambda + A) = \lambda + \inf A$

Infatti $x \in M(\lambda + A) \iff x \geq \lambda + a \ \forall a \in A$
$\iff x - \lambda \geq a \ \forall a \in A \iff x - \lambda \in M(A)$
$\iff x \in \lambda + M(A)$.
Quindi $M(\lambda + A) = \lambda + M(A)$, da cui la prima uguaglianza. La seconda è analoga.

4) Se $\lambda \geq 0$ $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$ e $\inf(\lambda A) = \lambda \inf A$

Il caso $\lambda = 0$ è ovvio. Supponendo $\lambda > 0$, si ha
$x \in M(\lambda A) \iff x \geq \lambda a \ \forall a \in A \iff \frac{x}{\lambda} \geq a \ \forall a \in A$
$\iff \frac{x}{\lambda} \in M(A) \iff x \in \lambda M(A)$.

Quindi $M(\lambda A) = \lambda M(A)$, che implica la prima uguaglianza. La seconda è analoga.

5) $\sup(-A) = -\inf A$, $\inf(-A) = -\sup A$

Infatti $M(-A) = \{ b \in \mathbb{R} \mid b \geq -a \ \forall a \in A \} =$
$= \{ b \in \mathbb{R} \mid -b \leq a \ \forall a \in A \} = \{ -c \in \mathbb{R} \mid c \leq a \ \forall a \in A \}$
$= -\{ c \in \mathbb{R} \mid c \leq a \ \forall a \in A \} = -m(A)$.
$\inf A = \max m(A) \Rightarrow x \leq \inf A \ \forall x \in m(A) \Rightarrow$
$-x \geq -\inf A \ \forall x \in m(A) \Rightarrow y \geq -\inf A \ \forall y \in -m(A)$
Ma $-m(A) = M(-A) \Rightarrow \sup(-A) = \min M(-A) = -\inf A$.

Δ

Oss 2 Da (4) e (5) segue che se $\lambda \leq 0$,

$$\sup(\lambda A) = \lambda \inf A \quad , \quad \inf(\lambda A) = \lambda \sup A$$

6) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B \quad , \quad \inf(A+B) = \inf A + \inf B$

Dato che $A + B = \bigcup_{a \in A} (a + B)$, la prima uguaglianza segue dall'Oss 1 e da (3):

$$\sup(A+B) = \sup \bigcup_{a\in A} (a+B) \overset{\text{Oss } 2}{=} \sup\{\sup(a+B) \mid a \in A\}$$

$$\overset{(3)}{=} \sup\{a + \sup B \mid a \in A\} \overset{(3)}{=} \sup B + \sup\{a \mid a \in A\}$$

$$= \sup B + \sup A$$

La dimostrazione della seconda uguaglianza è analoga

Oss 3 Le proprietà (3), (4), (5), (6) possono essere riformulate per sup e inf di funzioni. Ad esempio, 3) diventa

3') $\sup_{x\in X} (\lambda + f(x)) = \lambda + \sup_{x \in X} f(x)$.

Attenzione La riformulazione corretta di (6) è

(6') $\sup_{\substack{x\in X\\ y \in Y}} (f(x) + g(y)) = \sup_{x\in X} f(x) + \sup_{y \in Y} g(y)$

per $f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$. Infatti

$$f(X) + g(Y) = \{f(x) + g(y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Invece, se f e g sono due funzioni $X \to \mathbb{R}$, si ha

a) $\sup_{x\in X} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x \in X} g(x)$

b) $\inf_{x\in X} (f(x) + g(x)) \geq \inf_{x\in X} f(x) + \inf_{x\in X} g(x)$

che seguono da (1), (6) e dall'inclusione

$$\{f(x) + g(x) \mid x \in X\} \subset f(X) + g(X).$$

In generale, non vale l'uguaglianza in (a) e (b), come mostra l'esempio: $X = [0,1]$, $f(x) = x$, $g(x) = -x$. Infatti $f(x) + g(x) = 0$, dunque

$$\sup(f+g) = \inf(f+g) = 0$$

Però

$$\sup f + \sup g = 1 + 0 = 1 \neq 0$$

$$\inf f + \inf g = 0 + (-1) = -1 \neq 0$$

$\triangle$