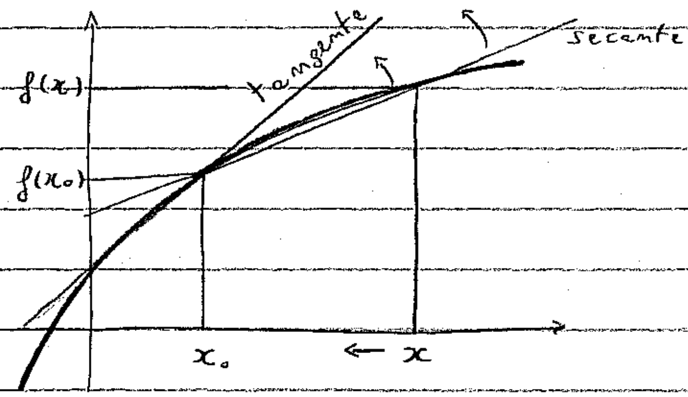
29.11.2011

La derivata

Siano $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a,b[$. Geometricamente, la derivata di f in x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$



Questa retta tangente può essere individuata come limite delle rette secanti che passano per i punti del grafico di f $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$, al tendere di x a x_0. Il coefficiente angolare di tale secante è

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \leftarrow \text{RAPPORTO INCREMENTALE DI } f \text{ TRA } x_0 \text{ e } x$$

quindi il coefficiente angolare della tangente è il limite di questa funzione per $x \to x_0$.
Questo spiega la seguente:

Defn Diciamo che f è <u>derivabile</u> nel punto x_0 se esiste finito il limite

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Il numero $f'(x_0)$ si chiama <u>derivata</u> di f in x_0.
Si indica anche con i simboli $Df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$.

Con il cambio di variabile $x = x + h$, possiamo anche scrivere

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Esempi

1) Le funzioni costanti, $f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$, hanno derivata nulla in ogni punto:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \longrightarrow 0 \quad \text{per } x \to x_0$$

2) Le funzioni lineari, $f(x) = ax \quad \forall x \in \mathbb{R}$, hanno derivata costantemente uguale al coeff angolare a:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{ax - ax_0}{x - x_0} = a \longrightarrow a \quad \text{per } x \to x_0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = a \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

3) Sia $H(t)$ l'altezza della marea al tempo t. Fissato t_0, la quantità

$$\frac{H(t_0+h) - H(t_0)}{h} = \frac{\text{variazione di altezza}}{\text{tempo trascorso}}$$

rappresenta il tasso di crescita della marea nell'intervallo di tempo $[t_0, t_0+h]$. Quindi la derivata

$$H'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{H(t_0+h) - H(t_0)}{h}$$

rappresenta il tasso di crescita istantaneo nell'istante t_0, o velocità istantanea della marea

• Riformulazione:

Possiamo riscrivere $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

in modo equivalente come $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h} = 0$

che nella notazione di Landau si scrive come

$$f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h = o(h) \quad \text{per } h\to 0$$

ossia

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \quad \text{per } h\to 0}$$

La funzione $p(h) = f(x_0) + f'(x_0)h$ è un polinomio di grado 1 in h e la formula sopra mostra che questo polinomio approssima $f(x_0+h)$ con un errore che è $o(h)$, ossia infinitesimo rispetto ad h, per $h\to 0$.

Quindi: $f'(x_0)$ è il coefficiente del termine di grado 1 del polinomio $p(h)$ che approssima $f(x_0+h)$ con un errore $o(h)$ per $h\to 0$ (si verifica immediatamente che vi è al più un numero che soddisfa questa condizione).

Oss Con il cambio di variabile $x = x_0+h$, la formula nel riquadro si scrive come

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

per $x\to x_0$

• Dalla formula nel riquadro segue che $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

Quindi: **Se f è derivabile in x_0, allora è continua in x_0.**

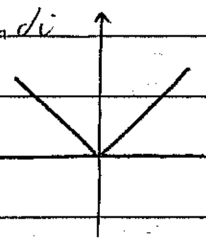
Esempi

1) Sia $f(x) = e^x$. Da
$$e^x = 1 + x + o(x) = e^0 + 1\cdot x + o(x) \quad \text{per } x \to 0$$
segue che la derivata di e^x in 0 vale 1.

2) Sia $f(x) = \sin x$. Da
$$\sin x = x + o(x) = \sin 0 + 1\cdot x + o(x) \quad \text{per } x \to 0$$
segue che la derivata di $\sin x$ in 0 vale 1.

3) Sia $f(x) = \cos x$. Da
$$\cos x = 1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{= o(x)} = \cos 0 + 0\cdot x + o(x) \quad \text{per } x \to 0$$
segue che la derivata di $\cos x$ in 0 vale 0.

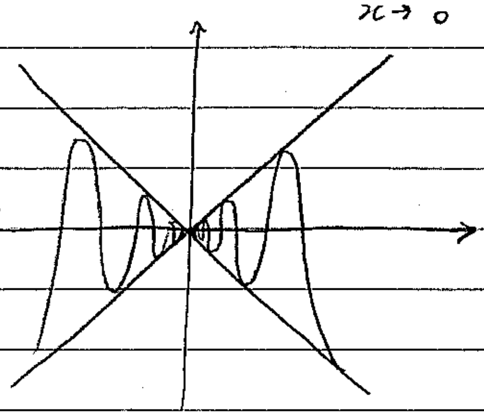
4) La funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile in 0.
Infatti il rapporto incrementale tra 0 e x è
$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{|x| - 0}{x} = \frac{|x|}{x}$$
e vale 1 se $x > 0$ e -1 se $x < 0$. Quindi
non esiste il limite $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.



5) La funzione $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
non è derivabile in 0.
Infatti $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \to 0$ per $n \to \infty$ e
$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n} = \sin \frac{1}{x_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \quad , \text{ mentre}$$
con $x_n' = \dfrac{1}{2\pi n} \to 0$ per $n \to \infty$ si ha

$$\frac{f(x_n') - f(0)}{x_n'} = \sin\frac{1}{x_n'} = \sin 2\pi n = 0$$

Quindi non esiste $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$



Proprietà algebriche della derivata

1) Se f e g sono derivabili in x_0, allora $f+g$ è derivabile in x_0 e vale

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Infatti sommando $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$
con $g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)$
troviamo

$$(f+g)(x_0+h) = f(x_0+h) + g(x_0+h) = f(x_0) + g(x_0) + f'(x_0)h$$
$$+ g'(x_0)h + o(h) = (f+g)(x_0) + (f'(x_0)+g'(x_0))h + o(h)$$
$$\Longrightarrow (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2) Se $c \in \mathbb{R}$ e f è derivabile in x_0, allora cf è derivabile in x_0 e vale

$$(cf)'(x_0) = c f'(x_0)$$

Infatti, da $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$ segue che $cf(x_0+h) = cf(x_0) + cf'(x_0)h + o(h)$

3) Se f e g sono derivabili in x_0, allora $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e vale

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

Infatti:

$$f \cdot g(x_0+h) = \big(f(x_0+h) + f'(x_0)h + o(h)\big)\big(g(x_0+h) + g'(x_0)h + o(h)\big)$$

$$= f(x_0+h)\, g(x_0+h) + \big(f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)\big)h +$$

$$\underbrace{+\, o(h)\big(g(x_0+h) + g'(x_0)h + o(h)\big) + o(h)\big(f(x_0+h) + f'(x_0)h + o(h)\big)}_{o(h)} \quad \text{per } h \to 0$$

Essendo il coefficiente del termine di grado 1, la quantità $f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$ è la derivata di fg in x_0.

4) Se f è derivabile in x_0 e $f(x_0) \neq 0$, allora $\frac{1}{f}$ è derivabile in x_0 e vale

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$

Per dimostrarlo, partiamo dallo sviluppo

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + o(u) \quad \text{per } u \to 0$$

che segue da $\frac{1}{1+u} - 1 + u = \frac{1 - 1 - u + u + u^2}{1+u} = \frac{u^2}{1+u} = O(u^2) = o(u)$

Allora, per $h \to 0$

$$\frac{1}{f(x_0+h)} = \frac{1}{f(x_0)+f'(x_0)h+o(h)} = \frac{1}{f(x_0)}\,\frac{1}{1+\underbrace{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}h+o(h)}_{=u\to 0}}$$

$$= \frac{1}{f(x_0)}\left(1-\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}h+\underbrace{o(h)+o\left(\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}h+o(h)\right)}_{=o(h)}\right)$$

$$= \frac{1}{f(x_0)} - \frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}h + o(h)$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}.$$

5) Se f e g sono derivabili in x_0 e $g(x_0)\neq 0$, allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e vale

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Questo segue da 3) e 4). Infatti:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$

$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\right) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$