

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

# Il quarto problema di Hilbert

28 Ottobre 2011

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Candidato  
**Dario Domingo**

Relatore  
**Prof. Alberto Abbondandolo**  
Università di Pisa

---

ANNO ACCADEMICO 2010–2011



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
1.1	Cenni storici . . . . .	5
1.2	Il quarto problema . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Strutture Finsler e geodetiche</b>	<b>9</b>
2.1	Strutture Finsler . . . . .	9
2.2	Geodetiche . . . . .	11
2.2.1	Minimi locali di un funzionale . . . . .	12
2.3	Esempi . . . . .	19
<b>3</b>	<b>La coseno-trasformata</b>	<b>25</b>
3.1	Coseno-trasformata di misure . . . . .	25
3.2	Coseno-trasformata di funzioni . . . . .	28
3.2.1	In coordinate polari... . . . . .	29
3.3	Coseno-trasformata e norme di Legendre . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Risoluzione analitica del problema</b>	<b>37</b>
4.1	Il teorema di Hamel . . . . .	37
4.2	Espressione analitica delle Finsler proiettive . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Formula di Crofton e distanze proiettive</b>	<b>45</b>
5.1	Lo spazio delle rette orientate . . . . .	45
5.2	La formula di Crofton . . . . .	50
5.3	Una nuova costruzione di distanze proiettive . . . . .	53
	<b>Bibliografia</b>	<b>56</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Cenni storici

Dal 6 al 12 agosto del 1900 si tenne a Parigi il secondo Congresso Internazionale dei Matematici (ICM): il primo si era tenuto solo tre anni prima e il discorso di apertura era stato affidato ad uno dei più grandi matematici del tempo: Henri Poincaré. Al secondo congresso, il discorso iniziale fu invece affidato all'altro illustre matematico contemporaneo: David Hilbert.

Egli, però, arrivò con un paio di giorni di ritardo a Parigi e fu solo allora che poté tenere il suo celebre discorso. Le prime frasi sono familiari alla maggior parte dei matematici contemporanei:

*“Chi di noi non vorrebbe sollevare il velo sotto cui sta nascosto il futuro, per gettare uno sguardo sui prossimi progressi della nostra scienza e sui segreti del suo sviluppo durante i secoli venturi? Quali saranno gli speciali obiettivi a cui mireranno le più insigni menti matematiche delle generazioni future?”*

La parte tuttavia più nota della sua discussione fu senza dubbio quella riguardante una lista di problemi, che avrebbero interessato molti matematici nel secolo appena iniziato e che sarebbero presto divenuti famosi come i “23 problemi di Hilbert”. Egli in realtà, durante il congresso, riuscì a proporre solo dieci dei problemi della sua lista, per motivi di tempo: la lista completa fu pubblicata tra i documenti degli atti del congresso.

Già ad una prima lettura, essa colpisce per la varietà dei settori della matematica toccati. A detta dello stesso Hilbert, i problemi da lui proposti *“sono solo campioni di problemi; ma sono sufficienti a far vedere quanto sia ricca, quanto sia varia, quanto sia estesa oggi la scienza matematica”*.

Il livello di difficoltà varia certamente di molto da un problema all'altro: il terzo, ad esempio, fu risolto ancora prima che venissero pubblicati gli atti del Congresso; altri, invece, sono stati risolti solo di recente, mentre altri ancora risultano, a tutt'oggi, problemi aperti.

Senza dubbio, però, la lista dei 23 problemi costituisce un documento di grande importanza nella storia della matematica del XX secolo: spesso, anche nei casi in cui un problema sia stato risolto nella formulazione originale proposta da Hilbert, le sue variazioni e gli sviluppi che esso ha portato non sono meno interessanti ed importanti del problema originale.

## 1.2 Il quarto problema

In questa tesi, esamineremo in particolare il quarto dei problemi che Hilbert inserì nella sua lista.

Utilizzando le stesse parole del suo autore, il problema chiede di

“costruire e studiare le geometrie nelle quali il segmento costituisca la più breve connessione tra due punti”.

Già dalla sua stessa formulazione, sono evidenti i legami del problema con le basi della geometria e, in particolare, con gli assiomi che Euclide pose alla base della geometria che porta il suo nome.

Tuttavia, la risoluzione che qui proporremo porta con sé le idee e gli strumenti di differenti settori della matematica moderna, quali ad esempio la geometria differenziale ed integrale, l'analisi (con un particolare uso delle equazioni differenziali alle derivate parziali) ed il calcolo delle variazioni.

Il problema fu inizialmente affrontato da George Hamel, un allievo dello stesso Hilbert, che risolse parzialmente il problema da un punto di vista prettamente analitico, già nel 1901: egli pubblicò i suoi risultati in [3], nel 1903.

Ulteriori sviluppi sull'argomento si ebbero però nel corso dei decenni successivi: di particolare importanza è senza dubbio l'approccio geometrico di Herbert Busemann, nella seconda metà del '900. Egli fornì un metodo semplice e generale per la costruzione di metriche che soddisfacessero il problema proposto da Hilbert.

Noi, in questo lavoro, limiteremo la trattazione del problema al caso bidimensionale, studiando le metriche sul piano per le quali il segmento risulti la curva di minor lunghezza, a estremi fissati.

Inizialmente, sarà necessario introdurre alcune definizioni (affiancate dai corrispondenti esempi) ed analizzare i principali risultati ad esse collegati. Specificheremo, ad esempio, cosa sia una struttura *Finsler* sul piano o come agisce la *coseno-trasformata* su una funzione. Ci soffermeremo anche sul concetto di *geodetica* e sulle sue proprietà di minimizzazione delle lunghezze, sebbene la nozione di geodetica sia probabilmente già nota dalla geometria differenziale.

Potremo a quel punto studiare davvero il problema, seguendo due differenti approcci.

Il primo sarà prettamente analitico e ci permetterà di trovare condizioni necessarie e sufficienti affinché una metrica Finsler piana soddisfi le nostre richieste. Nell'ultimo capitolo, invece, sulla base dell'idea di H. Busemann, forniremo esplicitamente un

---

modo per costruire delle distanze sul piano che inducano delle metriche proiettive (metriche, cioè, che soddisfino il nostro problema), non necessariamente Finsler.

La referenza principale per questo lavoro è stato l'articolo di J.C. Álvarez Paiva, *Hilbert's fourth problem in two dimensions*, citato in bibliografia al punto [1].





## Capitolo 2

# Strutture Finsler e geodetiche

### 2.1 Strutture Finsler

Iniziamo la trattazione del nostro problema introducendo alcune importanti definizioni ed alcuni risultati molto utili nel seguito.

Alla base di tutto, troviamo il concetto di struttura Finsler piana. Per capire però cosa intendiamo esattamente con questa espressione, risulta comodo introdurre la seguente definizione.

**Definizione 2.1.1.** Diremo che una norma  $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfa la condizione di Legendre se

1.  $N$  è  $C^\infty$  su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ;
2. la matrice Hessiana di  $N^2$  è definita positiva in ogni punto di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ .

**Definizione 2.1.2.** Un'applicazione continua  $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è una *metrica Finsler* sul piano se:

1.  $L$  è  $C^\infty$  su  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ;
2. per ogni punto  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , l'applicazione

$$L_{(x_1, x_2)} : (v_1, v_2) \mapsto L(x_1, x_2, v_1, v_2)$$

è una norma su  $\mathbb{R}^2$  che soddisfa la condizione di Legendre.

In altri termini, una volta fissato un certo punto  $x = (x_1, x_2)$  del piano, l'applicazione  $L_{(x_1, x_2)}$  ci fornisce un modo di misurare la lunghezza di tutti i vettori piani  $v$  con quel punto base. Capiterà perciò di indicare con  $\|v\|_x$  la quantità  $L(x, v)$ .

*Nota.* In letteratura, le metriche Finsler sopra definite sono anche note con il nome di Finsler reversibili. L'aggettivo reversibile vuole sottolineare il fatto che, tra le proprietà della funzione  $L$ , richiediamo che in ogni punto  $(x_1, x_2)$  l'applicazione

$L_{(x_1, x_2)}$  sia una vera norma.

Talvolta infatti, in altri contesti, si richiede che la condizione di omogeneità della norma  $L_{(x_1, x_2)}$  valga solo per gli scalari positivi, ammettendo dunque la possibilità che la norma sia asimmetrica rispetto all'origine.

*Osservazione 2.1.3.* La definizione di metrica Finsler, che noi abbiamo visto nel caso particolare di  $\mathbb{R}^2$ , può essere data anche per varietà differenziabili  $M$ . In tal caso, attraverso l'applicazione  $L$ , ad ogni punto  $p$  della varietà associamo in modo  $C^\infty$  una norma sullo spazio tangente  $T_p M$ . La coppia  $(M, L)$  sarà dunque detta varietà Finsler.

Ciò mostra anche che le varietà Finsler non sono altro che una generalizzazione delle varietà Riemanniane, in cui, per ogni punto  $p$ , la norma sullo spazio tangente  $T_p M$  è derivata da un prodotto scalare sullo stesso, definito positivo.

Vediamo adesso come una struttura Finsler sul piano ci fornisca un modo canonico per misurare la lunghezza delle curve  $C^\infty$  in esso.

**Definizione 2.1.4.** Sia  $L$  una metrica Finsler su  $\mathbb{R}^2$  e sia  $I = [a, b]$  un intervallo reale. Data una curva piana  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  di classe  $C^\infty$ , la quantità

$$\ell(\gamma) := \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} dt.$$

è detta *lunghezza* della curva  $\gamma$ .

Dalle proprietà della funzione  $L$  (in particolare dalla continuità e dal fatto che  $L(\gamma(t), \cdot)$  sia una norma per ogni  $t$  dell'intervallo  $I$ ), segue subito che la lunghezza di una curva  $\gamma$  è nulla se e solo se la curva è costante.

*Osservazione 2.1.5.* L'aver chiamato “metrica Finsler” la funzione  $L$  non è un caso. Infatti, la possibilità di misurare la lunghezza delle curve su una qualunque varietà Finsler  $M$  induce canonicamente su essa una funzione distanza. Basta porre, per ogni coppia di punti  $x, y$  della varietà,

$$d(x, y) = \inf \{ \ell(\gamma) \mid \gamma \in \Omega_{x, y} \},$$

dove  $\Omega_{x, y}$  è lo spazio delle curve  $C^\infty$  a valori nella varietà, che hanno per estremo iniziale il punto  $x$  e per estremo finale il punto  $y$ .

Esattamente come si fa per le varietà riemanniane, si può verificare che la funzione  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  così definita ha tutte le proprietà di una distanza.

*Osservazione 2.1.6.* La lunghezza di una curva è invariante per riparametrazioni della curva stessa: si tratta, cioè, di una quantità intrinsecamente legata al sostegno della curva.

Supponiamo infatti che  $J \subseteq \mathbb{R}$  sia un altro intervallo reale e sia  $p : J \rightarrow I$  un diffeomorfismo  $C^\infty$ . Possiamo mostrare che, detta  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  la curva  $\gamma \circ p$ , si ha  $\ell(\beta) = \ell(\gamma)$ . Infatti

$$\ell(\beta) = \int_J L(\beta(t), \dot{\beta}(t)) dt = \int_J L(\gamma(p(t)), \dot{\gamma}(p(t)) \cdot \dot{p}(t)) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_J |\dot{p}(t)| L(\gamma(p(t)), \dot{\gamma}(p(t))) dt \\
&= \int_I L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds = \ell(\gamma).
\end{aligned}$$

Inoltre, fissata una metrica Finsler liscia su  $\mathbb{R}^2$ , ogni curva regolare (cioè con vettore tangente mai nullo) può essere riparametrizzata per lunghezza d'arco rispetto ad  $L$ : possiamo, cioè, trovare una curva  $\beta$  con lo stesso sostegno di  $\gamma$  tale che  $L(\beta, \dot{\beta}) \equiv 1$ .

Il modo per ottenere una riparametrizzazione per lunghezza d'arco di una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  è il seguente: si fissa un punto  $t_0$  in  $I$  e si considera la funzione

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(\tau)\|_{\gamma(\tau)} d\tau \quad \text{per } t \in I.$$

Grazie al fatto che  $\gamma$  è regolare, si deduce subito che  $s$  ha sempre derivata prima strettamente positiva ed è dunque un diffeomorfismo  $C^\infty$  con l'immagine: detti allora  $J = s(I)$  e  $p : J \rightarrow I$  la funzione inversa di  $s$ , si verifica facilmente che la curva

$$\beta = \gamma \circ p : J \rightarrow \mathbb{R}^2$$

è parametrizzata per lunghezza d'arco ed ha ovviamente lo stesso sostegno di  $\gamma$ .

Osserviamo che l'ampiezza dell'intervallo  $J$  così ottenuto è esattamente uguale alla lunghezza della curva. Attraverso una opportuna affinità  $\varphi$  possiamo riportare l'intervallo  $J$  nell'intervallo  $I$  iniziale ( $\varphi$  sarà composizione di una omotetia, che riscalci  $J$  in modo che la sua ampiezza sia uguale a quella di  $I$ , e di una traslazione).

La curva

$$\alpha = \beta \circ \varphi^{-1} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

risulterà allora essere una riparametrizzazione di  $\beta$  (e dunque anche di  $\gamma$ ), con velocità  $L(\alpha, \dot{\alpha})$  costante ma con la peculiarità di avere lo stesso intervallo di definizione della curva  $\gamma$ .

Ricapitolando, abbiamo dimostrato che per ogni curva regolare  $\gamma$  definita su  $I$ , esiste sempre una riparametrizzazione definita sullo stesso intervallo e con modulo della velocità costante (costante che sarà data dal rapporto tra la lunghezza di  $\gamma$  e l'ampiezza dell'intervallo  $I$ ).

## 2.2 Geodetiche

Nella precedente sezione abbiamo visto come, data una metrica Finsler su  $\mathbb{R}^2$ , sia naturalmente definito il funzionale  $\ell : C^\infty(I, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ , che ad ogni curva piana  $C^\infty$  associa la sua lunghezza secondo la metrica  $L$ .

In modo del tutto simile, data  $L$ , possiamo definire un funzionale

$$E : C^\infty(I, \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$$

che associa ad una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  la sua *energia*, definita da

$$E(\gamma) = \int_I L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))^2 dt.$$

Per semplicità, nel seguito chiameremo  $K(x, v)$  l'applicazione  $L(x, v)^2$ .

L'energia di una curva, a differenza della sua lunghezza, non è invariante per riparametrazioni. Questo fatto, ad esempio, può essere visto come un immediato corollario della seguente proposizione.

**Proposizione 2.2.1.** *Sia  $\gamma$  una curva piana  $C^\infty$  definita sull'intervallo  $I=[a, b]$ . Allora*

$$\ell(\gamma)^2 \leq (b-a) E(\gamma). \quad (2.1)$$

*L'uguaglianza, inoltre, è raggiunta se e soltanto se la parametrizzazione di  $\gamma$  è a velocità costante.*

*Dimostrazione.* Basta applicare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \ell(\gamma)^2 &= \left( \int_a^b L(\gamma, \dot{\gamma}) dt \right)^2 \\ &\leq \int_a^b 1^2 dt \cdot \int_a^b K(\gamma, \dot{\gamma}) dt = (b-a) E(\gamma). \end{aligned}$$

La stessa disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ci dice inoltre che

$$\ell(\gamma)^2 = (b-a) E(\gamma)$$

se e solo se i due vettori  $L(\gamma, \dot{\gamma})$  e 1 sono paralleli, come elementi di  $C^\infty(I, \mathbb{R})$ : ciò è appunto equivalente a dire che  $L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$  sia costante per  $t \in I$ .  $\square$

La proposizione appena vista ci fornisce anche il seguente risultato: fissata una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  di classe  $C^\infty$ , l'insieme

$$\{ E(\beta) \mid \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ riparametrizzazione di } \gamma \}$$

assume minimo quando  $\beta$  è parametrizzata a velocità costante.

### 2.2.1 Minimi locali di un funzionale

Avendo introdotto i due funzionali *lunghezza* ed *energia* di una curva  $\gamma$ , è molto utile definire con precisione il concetto di minimo locale per l'uno o per l'altro funzionale.

Daremo la definizione solo per il funzionale lunghezza, tenendo presente che essa si estende in modo identico anche all'energia.

**Definizione 2.2.2.** Una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  è un minimo locale per  $\ell$  se

$$\forall t_0 \in ]a, b[ \quad \exists J \subset I \text{ intorno di } t_0 \text{ t.c. } \ell(\gamma) \leq \ell(\alpha) \quad \forall \alpha : \text{supp}(\alpha - \gamma) \subset J.$$

**Definizione 2.2.3.** Diremo che una curva  $\gamma \in C^\infty(I, \mathbb{R}^2)$  è una *geodetica* per la metrica  $L$  se essa è un minimo locale del funzionale lunghezza  $\ell$  associato ad  $L$ .

Dato che la lunghezza di una curva  $\gamma$  è invariante per riparametrazioni, il fatto che essa sia una geodetica dipende solo dal suo sostegno. Prima di arrivare al teorema chiave di questo capitolo, che ci fornirà delle condizioni equivalenti al fatto che una curva sia una geodetica, è utile ricordare le seguenti equazioni di Eulero-Lagrange.

**Definizione 2.2.4.** Sia  $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una applicazione  $C^\infty$  su  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  e sia  $\gamma \in C^\infty(I, \mathbb{R}^2)$ ,  $I = [a, b]$ , una curva piana regolare. Diremo che  $\gamma$  soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange per  $F$  (i cui parametri sono  $(x_1, x_2, v_1, v_2)$ ) se sono verificate le seguenti due identità:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial v_1}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial v_2}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0, \quad (2.3)$$

per ogni punto  $t$  dell'intervallo aperto  $(a, b)$ .

**Lemma 2.2.5.** *Supponiamo la funzione  $F$  sia 1-omogenea nelle ultime due variabili e sia  $\gamma$  una curva che soddisfa le due equazioni di Eulero-Lagrange per  $F$ . Allora anche ogni sua riparametrazione  $\beta$  soddisfa le medesime equazioni.*

*Dimostrazione.* Sia  $p : J \rightarrow I$  un diffeomorfismo e sia  $\beta = \gamma \circ p$  una riparametrazione di  $\gamma$ . Per ipotesi, vale

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\gamma, \dot{\gamma}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial v_1}(\gamma, \dot{\gamma}) = 0. \quad (2.4)$$

Calcoliamo adesso la stessa espressione su  $(\beta, \dot{\beta})$  e mostriamo che anch'essa si annulla (i conti per l'altra equazione di Eulero-Lagrange sono analoghi).

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial x_1}(\beta, \dot{\beta}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial v_1}(\beta, \dot{\beta}) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_1}(\gamma \circ p, (\dot{\gamma} \circ p) \cdot \dot{p}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial v_1}(\gamma \circ p, (\dot{\gamma} \circ p) \cdot \dot{p}) \\ &= \dot{p} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1}(\gamma \circ p, \dot{\gamma} \circ p) - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial v_1}(\gamma \circ p, \dot{\gamma} \circ p). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Nell'ultimo passaggio, abbiamo sfruttato le proprietà di omogeneità (rispettivamente di grado 1 e 0) delle funzioni  $\frac{\partial F}{\partial x_1}$  e  $\frac{\partial F}{\partial v_1}$ .

Calcolando però il secondo addendo della (2.5), troviamo

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial v_1}(\gamma \circ p, \dot{\gamma} \circ p) \right) = \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial v_1}(\gamma, \dot{\gamma}) \right) \circ p \right] \\
& = \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial v_1}(\gamma, \dot{\gamma}) \right) \circ p \right] \cdot \dot{p} \stackrel{(2.4)}{=} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}(\gamma, \dot{\gamma}) \right) \circ p \right] \cdot \dot{p} \\
& = \dot{p} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1}(\gamma \circ p, \dot{\gamma} \circ p).
\end{aligned}$$

Dunque appunto, come volevamo, si ha

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F}{\partial x_1}(\beta, \dot{\beta}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial v_1}(\beta, \dot{\beta}) \\
& = \dot{p} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1}(\gamma \circ p, \dot{\gamma} \circ p) - \dot{p} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1}(\gamma \circ p, \dot{\gamma} \circ p) = 0.
\end{aligned}$$

□

**Teorema 2.2.6.** *Sia  $L$  una metrica Finsler piana e sia  $\gamma \in C^\infty(I, \mathbb{R}^2)$  una curva regolare. Poniamo  $K = L^2$ . Sono equivalenti:*

1.  $\gamma$  è una geodetica;
2.  $\gamma$  soddisfa Eulero-Lagrange per  $L$ ;
3.  $\gamma$ , riparametrizzata con velocità costante, soddisfa Eulero-Lagrange per  $K$ ;
4.  $\gamma$ , riparametrizzata con velocità costante, è un minimo locale per  $E$ .

*Dimostrazione.* Articoliamo la dimostrazione delle equivalenze in modo ciclico.

1)  $\implies$  2) Sia  $I = [a, b]$  e sia  $t$  un punto interno ad  $I$ ,  $t \in (a, b)$ : mostriamo la validità delle equazioni (2.2) e (2.3) per  $L$ , nel punto  $t$  fissato.

Per ipotesi, sappiamo che esiste un intorno  $J \subset I$  del punto  $t$  tale che la funzione di una variabile reale

$$f(s) = \ell(\gamma + s\xi)$$

assuma minimo in  $s = 0$ , per ogni curva  $\xi \in C^\infty(I, \mathbb{R}^2)$  identicamente nulla fuori da  $J$ .

Inoltre, a meno di restringere  $J$ , possiamo evidentemente supporre che  $a, b \notin J$ .

Trattandosi di un minimo di una funzione di una variabile, abbiamo che

$$\left. \frac{d}{ds} \ell(\gamma + s\xi) \right|_{s=0} = 0 \quad \text{per ogni } \xi \text{ come sopra.}$$

Ricordando che  $\ell(\beta) = \int_a^b L(\beta(t), \dot{\beta}(t)) dt$ , otteniamo facilmente

$$f'(0) = \frac{d}{ds} \ell(\gamma + s\xi) \Big|_{s=0} = \int_a^b \frac{d}{ds} L(\gamma(t) + s\xi(t), \dot{\gamma}(t) + s\dot{\xi}(t)) \Big|_{s=0} dt.$$

Se  $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$ , allora l'espressione di sopra, tralasciando per semplicità l'argomento  $t$ , si riscrive come

$$\begin{aligned} f'(0) &= \int_a^b \left[ \frac{\partial L}{\partial x_1}(\gamma, \dot{\gamma}) \xi_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2}(\gamma, \dot{\gamma}) \xi_2 + \frac{\partial L}{\partial v_1}(\gamma, \dot{\gamma}) \dot{\xi}_1 + \frac{\partial L}{\partial v_2}(\gamma, \dot{\gamma}) \dot{\xi}_2 \right] dt \\ &= \int_a^b \left[ \frac{\partial L}{\partial x_1}(\gamma, \dot{\gamma}) \xi_1 + \frac{\partial L}{\partial v_1}(\gamma, \dot{\gamma}) \dot{\xi}_1 \right] dt + \int_a^b \left[ \frac{\partial L}{\partial x_2}(\gamma, \dot{\gamma}) \xi_2 + \frac{\partial L}{\partial v_2}(\gamma, \dot{\gamma}) \dot{\xi}_2 \right] dt. \end{aligned}$$

Integriamo ora per parti il secondo addendo di ciascuno dei due integrali.

Quanto al primo integrale, ad esempio, abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial L}{\partial v_1}(\gamma, \dot{\gamma}) \dot{\xi}_1 dt &= \left[ \frac{\partial L}{\partial v_1}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \xi_1(t) \right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_1}(\gamma, \dot{\gamma}) \xi_1(t) dt \\ &= - \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_1}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \xi_1(t) dt, \end{aligned}$$

in quanto  $\xi_1(a) = \xi_1(b) = 0$ .

Allo stesso modo, sfruttando stavolta che  $\xi_2(a) = \xi_2(b) = 0$ , si trova

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial v_2}(\gamma, \dot{\gamma}) \dot{\xi}_2 dt = - \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_2}(\gamma, \dot{\gamma}) \xi_2 dt.$$

Possiamo allora sostituire quanto trovato, nell'espressione di  $f'(0)$ . Abbiamo

$$f'(0) = \int_a^b \left[ \frac{\partial L}{\partial x_1}(\gamma, \dot{\gamma}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_1}(\gamma, \dot{\gamma}) \right] \xi_1 dt + \int_a^b \left[ \frac{\partial L}{\partial x_2}(\gamma, \dot{\gamma}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_2}(\gamma, \dot{\gamma}) \right] \xi_2 dt.$$

Osserviamo che il dominio dei precedenti integrali può anche essere ristretto al solo intervallo  $J$ , in quanto  $\xi_1(t) = \xi_2(t) \equiv 0$  per  $t \notin J$ .

Tuttavia, l'arbitrarietà nella scelta dei valori di  $\xi_1$  e  $\xi_2$  nell'intervallo  $J$  ci premette immediatamente di concludere che, se  $f'(0)$  è sempre nullo indipendentemente dalla  $\xi$  scelta, entrambi gli integrandi dell'ultima espressione devono essere nulli in ogni punto di  $J$  (ed in particolare nel punto  $t$  fissato!).

Ciò mostra appunto la validità delle due equazioni di Eulero-Lagrange (2.2 e 2.3)

per  $L$ , nel punto  $t$  arbitrariamente fissato all'inizio.

2)  $\implies$  3) Supponiamo  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  soddisfi le equazioni (2.2) e (2.3) per  $L$  e sia  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una riparametrizzazione di  $\gamma$  con velocità  $L(\beta(t), \dot{\beta}(t))$  costante.

Verifichiamo che  $\beta$  soddisfa (E.L.) per  $K$ . Dalla precedente osservazione, sappiamo già che  $\beta$  soddisfa le equazioni di E-L per  $L$ . Dunque, ad esempio,

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(\beta, \dot{\beta}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_1}(\beta, \dot{\beta}) \equiv 0. \quad (2.6)$$

Calcoliamo allora

$$\frac{\partial K}{\partial x_1}(\beta, \dot{\beta}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial v_1}(\beta, \dot{\beta})$$

e mostriamo che anch'essa è identicamente nulla (i conti per l'altra equazione di Eulero-Lagrange sono identici).

Ricordando che  $K = L^2$  e che  $L(\beta, \dot{\beta})$  è costante nel tempo, troviamo

$$\begin{aligned} & \frac{\partial K}{\partial x_1}(\beta, \dot{\beta}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial v_1}(\beta, \dot{\beta}) \\ &= 2 L(\beta, \dot{\beta}) \frac{\partial L}{\partial x_1}(\beta, \dot{\beta}) - \frac{d}{dt} \left( 2 L(\beta, \dot{\beta}) \frac{\partial L}{\partial v_1}(\beta, \dot{\beta}) \right) \\ &= 2 L(\beta, \dot{\beta}) \frac{\partial L}{\partial x_1}(\beta, \dot{\beta}) - 2 L(\beta, \dot{\beta}) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_1}(\beta, \dot{\beta}) \\ &= 2 L(\beta, \dot{\beta}) \left( \frac{\partial L}{\partial x_1}(\beta, \dot{\beta}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_1}(\beta, \dot{\beta}) \right). \end{aligned}$$

Grazie alle ipotesi (in particolare l'identità 2.6), abbiamo che

$$\frac{\partial K}{\partial x_1}(\beta(t), \dot{\beta}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial v_1}(\beta(t), \dot{\beta}(t)) \equiv 0.$$

3)  $\implies$  4) Per mostrare che una curva  $\gamma$  di velocità costante è un minimo locale dell'energia se soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange per  $K$ , è necessario sfruttare l'ipotesi di uniforme convessità della lagrangiana  $L$ .

Per una dimostrazione di questo fatto, rimandiamo al teorema 1.33 di [2].

4)  $\implies$  1) Sia  $\gamma \in C^\infty(I, \mathbb{R}^2)$ , con  $L(\gamma, \dot{\gamma})$  costante, un minimo locale per  $E$  e supponiamo per assurdo che la stessa  $\gamma$  non sia un minimo locale per  $\ell$ .

Troviamo dunque un punto  $t_0 \in I$  tale che, per ogni suo intorno  $J$ , esiste una curva  $\beta_J : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  t.c.

$$\beta_J = \gamma \text{ se } t \notin J \quad \text{ma} \quad \ell(\beta_J) < \ell(\gamma).$$



Dato che le curve  $\gamma$  e  $\beta_J$  coincidono al di fuori di  $J$  (ed in particolare hanno la stessa lunghezza), la condizione di prima è equivalente a dire che

$$\ell(\beta_J|_J) < \ell(\gamma|_J).$$

Sia allora  $\tilde{\beta}_J$  una riparametrizzazione a velocità costante di  $\beta_J|_J$ , che mantenga  $J$  come intervallo di definizione: dunque  $\ell(\tilde{\beta}_J) = \ell(\beta_J|_J)$ .

Grazie alla proposizione 2.2.1, posta  $c$  la radice quadrata dell'ampiezza di  $J$ , avremo

$$c\sqrt{E(\tilde{\beta}_J)} = \ell(\tilde{\beta}_J) < \ell(\gamma|_J) = c\sqrt{E(\gamma|_J)},$$

cioè  $E(\tilde{\beta}_J) < E(\gamma|_J)$ .

Poiché ciò vale per ogni intorno  $J$  del punto  $t_0$ , abbiamo contraddetto l'ipotesi che  $\gamma$  sia minimo locale di  $E$ . □

*Osservazione 2.2.7.* Fissate delle condizioni iniziali, le equazioni di Eulero-Lagrange per  $K$  identificano un ben definito problema di Cauchy. Scrivendo infatti in forma vettoriale le due equazioni, abbiamo

$$D_x K(\gamma, \dot{\gamma}) = \frac{d}{dt} D_v K(\gamma, \dot{\gamma})$$

Sviluppiamo ora la derivata rispetto al tempo. Otteniamo la seguente uguaglianza (sempre tra vettori bidimensionali):

$$D_x K(\gamma, \dot{\gamma}) = D_{xv} K(\gamma, \dot{\gamma}) \dot{\gamma} + D_{vv} K(\gamma, \dot{\gamma}) \ddot{\gamma}.$$

Ma la matrice  $D_{vv} K$  è invertibile per ipotesi (sappiamo anzi che è definita positiva); dunque, chiamando semplicemente con  $F(\gamma, \dot{\gamma})$  l'espressione  $D_x K(\gamma, \dot{\gamma}) - D_{xv} K(\gamma, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}$ , otteniamo

$$\ddot{\gamma} = [D_{vv} K(\gamma, \dot{\gamma})]^{-1} F(\gamma, \dot{\gamma}),$$

che è la forma normale di un sistema differenziale lineare del secondo ordine, con incognite  $\gamma_1(t)$  e  $\gamma_2(t)$ .

Fissate delle arbitrarie condizioni iniziali, troviamo dunque un'unica soluzione  $\gamma$  del sistema.

E' però naturale chiedersi se la soluzione trovata sia unica anche in senso "geometrico": in altri termini, fissato uno stesso punto iniziale  $x_0$  e due velocità  $v$  e  $w$  parallele (diciamo  $w = \lambda v$  per un certo  $\lambda \in \mathbb{R}$  non nullo), chiamiamo  $\alpha$  e  $\beta$  le curve soluzioni dei sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} D_x K(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{d}{dt} D_v K(\alpha, \dot{\alpha}) \\ \alpha(0) = x_0 \\ \dot{\alpha}(0) = v \end{array} \right. , \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} D_x K(\beta, \dot{\beta}) = \frac{d}{dt} D_v K(\beta, \dot{\beta}) \\ \beta(0) = x_0 \\ \dot{\beta}(0) = w \end{cases} . \quad (2.8)$$

Possiamo affermare che il sostegno delle due curve, quantomeno in un intorno di  $x_0$ , sia lo stesso?

La risposta è affermativa e scaturisce dal seguente ragionamento.

Grazie alla 2-omogeneità nelle ultime due variabili della funzione  $K$ , è facile dimostrare (sulla stessa idea della dimostrazione del lemma 2.2.5) che, per  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$\gamma(t) \text{ soddisfa (E.L.) per } K \implies \tilde{\gamma}(t) = \gamma(ct) \text{ soddisfa (E.L.) per } K.$$

Se dunque  $\alpha$  e  $\beta$  sono le curve soluzioni dei sistemi (2.7) e (2.8), posta  $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(\lambda t)$  avremo che  $\tilde{\alpha}$  è soluzione del sistema (2.8). Per unicità, essa non può che coincidere con  $\beta$  e dunque, avendo  $\tilde{\alpha}$  lo stesso sostegno di  $\alpha$ , abbiamo ottenuto, come volevamo, che il sostegno di  $\alpha$  e  $\beta$  è lo stesso.

Unendo quest'osservazione alle equivalenze fornite dal precedente teorema, arriviamo al seguente teorema di esistenza e unicità locale delle geodetiche:

**Teorema 2.2.8.** *Per ogni punto  $x = (x_1, x_2)$  del piano e per ogni direzione non nulla  $v = (v_1, v_2)$ , esiste un'unica geodetica (a meno di riparametizzazioni) avente, in  $x$ , direzione tangente  $v$ .*

*Una sua parametrizzazione è data dalla soluzione del sistema*

$$\begin{cases} D_x K(\gamma, \dot{\gamma}) = \frac{d}{dt} D_v K(\gamma, \dot{\gamma}) \\ \gamma(0) = x \\ \dot{\gamma}(0) = v \end{cases} .$$

I ragionamenti fatti per  $K$  non possono essere applicati alle equazioni di Eulero-Lagrange per  $L$ . Sappiamo infatti che, se  $\gamma$  soddisfa il problema

$$\begin{cases} D_x L(\gamma, \dot{\gamma}) = \frac{d}{dt} D_v L(\gamma, \dot{\gamma}) \\ \gamma(0) = x \\ \dot{\gamma}(0) = v \end{cases} , \quad (2.9)$$

allora anche ogni sua riparametrizzazione, che mantenga le stesse condizioni iniziali, soddisfa il medesimo problema.

Avendo chiaro il concetto di geodetica e soprattutto le sue proprietà di minimizzazione delle lunghezze, una possibile riformulazione del problema che vogliamo affrontare è la seguente:

STUDIARE LE METRICHE FINSLER PIANE LE CUI GEODETICHE SIANO  
TUTTE E SOLE LE RETTE.

E' però importante notare che questa formulazione, in virtù del precedente teorema, è del tutto equivalente alla seguente:

STUDIARE LE METRICHE FINSLER PIANE PER CUI OGNI RETTA SIA  
UNA GEODETICA.

Se infatti tutte le rette del piano sono geodetiche, fissato arbitrariamente un punto  $x$  del piano ed una direzione  $v$  non nulla, l'unica geodetica passante per  $x$  con direzione tangente  $v$  non può che essere la retta  $r_x(v) = \{x + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ , che sappiamo già essere una geodetica.

Otteniamo così anche che OGNI geodetica è in realtà una retta.

*Nota.* Quanto appena osservato è conseguenza dell'ipotesi che la metrica Finsler  $L$  sia, in ogni punto del piano, una norma con matrice hessiana definita positiva: infatti, senza questa ipotesi, si perde in generale l'unicità delle soluzioni del sistema (2.7) e con essa la validità del ragionamento fatto in precedenza.

E' infatti possibile, in mancanza dell'ipotesi di uniforme convessità di  $L$  nelle ultime due variabili, costruire esempi di metriche in cui tutte le rette siano geodetiche, ma non ogni geodetica sia una retta.

Concludiamo questa sezione introducendo una definizione di comodo.

**Definizione 2.2.9.** Le metriche piane per le quali ogni retta sia una geodetica si dicono *proiettive*.

## 2.3 Esempi

Analizziamo adesso tre esempi di metriche Finsler piane. In tutti e tre i casi, a ben vedere, si tratta di metriche riemanniane: in altre parole, per ogni punto  $x$  del piano, la norma dei vettori con punto base  $x$  deriva da un prodotto scalare tra gli stessi. Noi, però, ricaveremo solo l'espressione delle norme di tali vettori (evidenziando la struttura di varietà Finsler che è indotta sul piano): l'espressione dei prodotti scalari da cui esse derivano può essere ricavata con un procedimento del tutto analogo a quello che seguiremo per le norme.

**Esempio 1** (METRICA EUCLIDEA). Il più semplice esempio di metrica Finsler  $L$  è il seguente:

$$\begin{aligned} L : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, v_1, v_2) &\longmapsto \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \end{aligned}$$

Si tratta, evidentemente, della norma euclidea dei vettori del piano: non troviamo, infatti, una esplicita dipendenza dell'espressione di  $L$  dal particolare punto  $(x_1, x_2)$  fissato. E' ben noto che la metrica euclidea è un esempio di metrica proiettiva:

le rette, infatti, minimizzano (e non solo localmente) la distanza euclidea tra due qualunque loro punti.

**Esempio 2** (METRICA ELLITTICA). Consideriamo la sfera unitaria in  $\mathbb{R}^3$  centrata nel punto  $C = (0, 0, 1)$  e chiamiamo  $S$  la sua calotta inferiore, senza bordo: cioè

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, 0 \leq z < 1\}.$$

Possiamo allora effettuare la proiezione di  $S$ , dal punto  $C$  sul piano  $\{z = 0\}$  di  $\mathbb{R}^3$  (identificando quest'ultimo con  $\mathbb{R}^2$ ).

Sia  $P \in S$  un punto della semisfera. Associamo ad esso il punto  $F(P)$ , ottenuto come intersezione del piano  $\{z = 0\}$  con la retta  $r_P$  che congiunge  $C$  e  $P$ .

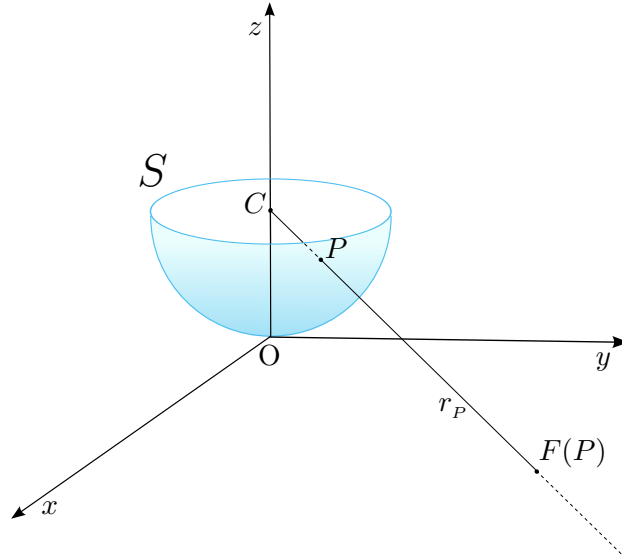


Figura 2.1: La proiezione  $F$ .

Se le coordinate di  $P$  sono  $(x, y, z)$ , allora

$$r_P = \{(\lambda x, \lambda y, \lambda z + (1 - \lambda)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Tenendo conto che  $z \neq 1$ , si trova facilmente che l'unica intersezione di questa retta col piano  $\{z = 0\}$  è il punto

$$\left( \frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}, 0 \right).$$

Abbiamo così costruito in coordinate la nostra proiezione  $F$ :

$$\begin{aligned} F : \quad S &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto \left( \frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right) \end{aligned}$$

Si tratta di un diffeomorfismo tra  $S$  ed  $\mathbb{R}^2$ . L'inversa di  $F$ , che per comodità chiamiamo  $G$ , ha la seguente forma

$$G(x_1, x_2) = \left( \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}} \right).$$

Attraverso il differenziale di  $G$ , per ogni punto  $(x_1, x_2)$  del piano abbiamo un diffeomorfismo tra  $\mathbb{R}^2$  (sarebbe in realtà  $T_{(x_1, x_2)}\mathbb{R}^2$ ) e lo spazio tangente  $T_P S$ , dove  $P = G(x_1, x_2)$ .

Possiamo allora misurare la lunghezza dei vettori del piano di punto base  $(x_1, x_2)$  sulla base della lunghezza (euclidea) dei corrispondenti vettori dello spazio tangente ad  $S$ , nel punto  $G(x_1, x_2)$ .

Dall'espressione di  $G$ , ricaviamo la matrice che canonicamente rappresenta  $DG_{(x_1, x_2)}$ :

$$DG_{(x_1, x_2)} = \frac{1}{(1+x_1^2+x_2^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1+x_2^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & 1+x_1^2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Visto quanto spiegato prima, al punto  $(x_1, x_2)$  che abbiamo fissato, associamo la norma  $L_{(x_1, x_2)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  data da

$$L_{(x_1, x_2)}(v_1, v_2) = \|DG_{(x_1, x_2)}(v_1, v_2)\|_{eu}.$$

La norma  $\|\cdot\|_{eu}$  è evidentemente la norma euclidea di  $\mathbb{R}^3$ .

Dopo calcoli abbastanza lunghi e noiosi, si trova che:

$$L_{(x_1, x_2)}(v_1, v_2) = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + (x_1 v_2 - x_2 v_1)^2}}{1 + x_1^2 + x_2^2}.$$

Abbiamo così finalmente costruito la nostra metrica Finsler  $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$L(x_1, x_2, v_1, v_2) = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + (x_1 v_2 - x_2 v_1)^2}}{1 + x_1^2 + x_2^2}.$$

La funzione distanza canonicamente indotta da  $L$  su  $\mathbb{R}^2$ , come spiegato in precedenza nell'osservazione 2.1.5, è nota come *distanza ellittica piana*.

Anche la metrica  $L$  così costruita risulta una metrica proiettiva sul piano. Per verificarlo, dobbiamo innanzitutto osservare che, per come abbiamo definito  $L$ , la lunghezza di una curva nello spazio  $(\mathbb{R}^2, L)$  è la stessa della lunghezza euclidea della curva rimontata (attraverso  $G$ ) sulla sfera.

Le geodetiche di  $(\mathbb{R}^2, L)$  saranno dunque tutte e sole le curve piane  $\alpha$  tali che le loro rimontate  $G(\alpha)$  siano geodetiche sulla sfera, dotata della metrica euclidea. Ma le geodetiche di  $S$ , sono tutti e soli i (semi)cerchi massimi, cioè l'intersezione di  $S$

con un piano passante per il suo centro  $C$ .

Dato che ognuna di tali geodetiche  $\gamma$ , attraverso la proiezione  $F$ , viene mandata in una retta del piano  $\{z = 0\} \equiv \mathbb{R}^2$  (la retta è l'intersezione del piano  $\{z = 0\}$  col piano che individuava  $\gamma$ ) e, viceversa, ogni retta del piano è rimontata in una geodetica di  $S$ , abbiamo proprio che le geodetiche di  $(\mathbb{R}^2, L)$  sono tutte e sole le rette.

**Esempio 3** (METRICA IPERBOLICA). L'ultimo esempio di metrica Finsler che vediamo è quello della metrica iperbolica.

Costruiremo però il nostro modello non su tutto il piano, ma sul disco

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}.$$

Sia  $H$  la falda superiore dell'iperboloide  $\{x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$ . Come noto, essa è racchiusa all'interno del cono  $\{x^2 + y^2 = z^2\} \cap \{z \geq 0\}$ .

Dall'origine  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ , possiamo dunque effettuare la proiezione di  $H$  sul disco  $D \times \{1\}$ , identificando quest'ultimo semplicemente con  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Sia  $P = (x, y, z)$  un punto dell'iperboloide. La retta  $r_P$ , passante per l'origine e per il punto in questione, interseca il disco nel punto

$$\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right).$$

Viceversa, ad ogni punto  $(x_1, x_2)$  in  $D$ , possiamo associare il punto d'intersezione tra  $H$  e la retta passante per esso e per l'origine. Otteniamo la seguente applicazione  $G : D \rightarrow H$ ,

$$G(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}\right).$$

Il suo differenziale in un generico punto  $(x_1, x_2)$  è canonicamente rappresentato dalla seguente matrice  $DG_{(x_1, x_2)} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ,

$$DG_{(x_1, x_2)} = \frac{1}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 - x_2^2 & x_1 x_2 \\ x_1 x_2 & x_1^2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Procediamo adesso in modo simile a prima, ma considerando stavolta su  $\mathbb{R}^3$  la metrica di Minkowski. Ciò è necessario affinché le geodetiche di  $H$ , rispetto a questa metrica, siano tutte e sole le intersezioni di  $H$  con i piani di  $\mathbb{R}^3$  passanti per l'origine.

Ricordando che la norma di Minkowski di un vettore  $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  è

$$\|X\|_{Min} = x^2 + y^2 - z^2,$$

come norma di un vettore  $(v_1, v_2)$  di punto base  $(x_1, x_2) \in D$  poniamo

$$L_{(x_1, x_2)}(v_1, v_2) = \|DG_{(x_1, x_2)}(v_1, v_2)\|_{Min}.$$

Svolgendo esplicitamente i calcoli, troviamo

$$\|DG_{(x_1, x_2)}(v_1, v_2)\|_{Min} = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - (x_1 v_2 - x_2 v_1)^2}}{1 - x_1^2 - x_2^2}.$$

La metrica Finsler su  $D$  è dunque l'applicazione  $L : D \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , che ha come espressione quella appena trovata:

$$L(x_1, x_2, v_1, v_2) = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - (x_1 v_2 - x_2 v_1)^2}}{1 - x_1^2 - x_2^2}.$$

Anche in questo caso siamo di fronte ad una metrica proiettiva. Infatti, la proiezione su  $D$  di una qualunque geodetica di  $H$  (rispetto alla metrica di Minkowski) è un segmento del disco: per la precisione, si tratta esattamente dell'intersezione di  $D$  col piano per l'origine che individuava la geodetica su  $H$ .





## Capitolo 3

# La coseno-trasformata

Introduciamo adesso il concetto di *coseno-trasformata* di misure e di funzioni. Risulta forse utile specificare una cosa: spesso, nel seguito, gli elementi della circonferenza  $S^1$  saranno trattati come semplici angoli  $\theta$  che variano nell'intervallo reale  $[0, 2\pi]$ . Altre volte, però, sarà comodo trattare  $S^1$  come sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$ , simmetrico rispetto all'origine. In tal caso, scriveremo esplicitamente  $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ .

### 3.1 Coseno-trasformata di misure

**Definizione 3.1.1.** Sia  $\mu$  una misura finita, con segno, sulla circonferenza  $S^1$ . Definiamo allora la seguente applicazione  $L_\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , detta *coseno-trasformata* della misura  $\mu$ :

$$L_\mu(v_1, v_2) = \int_0^{2\pi} |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta| d\mu(\theta).$$

In tal modo, abbiamo definito una mappa  $L$ , banalmente lineare, dallo spazio delle misure  $\mu$  su  $S^1$  allo spazio delle applicazioni da  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}$ :  $L(\mu) = L_\mu$ . Nostro scopo sarà esaminare per quali misure l'applicazione  $L_\mu$  risulta una norma su  $\mathbb{R}^2$ . Per prima cosa, però, osserviamo che la coseno-trasformata di una misura  $\mu$ , in alcuni casi, può essere l'applicazione identicamente nulla. A tal proposito, si veda più avanti l'osservazione 3.1.4, per comprendere la quale è necessario introdurre le seguenti definizioni.

**Definizione 3.1.2.** Sia  $\mu$  una misura con segno su  $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ . Diremo che:

1.  $\mu$  è pari se  $\mu(-A) = \mu(A) \quad \forall A \subseteq S^1$ ;
2.  $\mu$  è dispari se  $\mu(-A) = -\mu(A) \quad \forall A \subseteq S^1$ .

In modo del tutto equivalente, pensando gli elementi di  $S^1$  come angoli, potremmo riscrivere le condizioni  $\mu(-A) = \pm \mu(A)$  come  $\mu(A + \pi) = \pm \mu(A)$ .

*Osservazione 3.1.3.* Una arbitraria misura con segno  $\mu$  su  $S^1$  può sempre essere scritta come somma di una misura pari ed una dispari. Basta osservare che, per ogni  $A$  sottoinsieme di  $S^1$ , si ha

$$\mu(A) = \frac{\mu(A) + \mu(-A)}{2} + \frac{\mu(A) - \mu(-A)}{2}.$$

*Osservazione 3.1.4.* Se  $\mu$  è una misura dispari su  $S^1$ , allora

$$L_\mu(v_1, v_2) = 0 \quad \forall (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2.$$

La verifica è un semplice calcolo:

$$\begin{aligned} L_\mu(v_1, v_2) &= \int_0^{2\pi} |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta| d\mu(\theta) \\ &= \int_0^\pi |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta| d\mu(\theta) + \int_\pi^{2\pi} |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta| d\mu(\theta) \\ &= \int_0^\pi |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta| d\mu(\theta) \\ &\quad + \int_0^\pi |v_1 \cos(\theta + \pi) + v_2 \sin(\theta + \pi)| d\mu(\theta + \pi) \\ &= \int_0^\pi |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta| d\mu(\theta) - \int_0^\pi |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta| d\mu(\theta) = 0. \end{aligned}$$

In virtù delle due precedenti osservazioni e della linearità della mappa

$$\begin{aligned} L : \{ \text{misure su } S^1 \} &\longrightarrow \{ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \} \\ \mu &\longmapsto L_\mu \end{aligned}$$

possiamo limitare lo studio delle applicazioni  $L_\mu$  alle sole  $\mu$  pari.

Analizziamo adesso il seguente teorema, che ci fornisce delle condizioni sufficienti sulla misura  $\mu$  affinché  $L_\mu$  sia una norma sul piano.

**Teorema 3.1.5.** *Se la misura  $\mu$  è positiva ed il suo supporto contiene almeno due punti non antipodali di  $S^1$ , allora l'applicazione  $L_\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è una norma su  $\mathbb{R}^2$ .*

*Dimostrazione.* Verifichiamo le tre proprietà di una norma.

- **OMOGENEITA':**

Siano  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ . Allora

$$\begin{aligned} L_\mu(\lambda v_1, \lambda v_2) &= \int_0^{2\pi} |\lambda v_1 \cos \theta + \lambda v_2 \sin \theta| d\mu(\theta) \\ &= |\lambda| \int_0^{2\pi} |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta| d\mu(\theta) = |\lambda| L_\mu(v_1, v_2). \end{aligned}$$

- DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE:

Siano  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$  due vettori in  $\mathbb{R}^2$ . Mostriamo che

$$L_\mu(u + v) \leq L_\mu(u) + L_\mu(v).$$

$$\begin{aligned} L_\mu(u + v) &= \int_0^{2\pi} |(u_1 + v_1) \cos \theta + (u_2 + v_2) \sin \theta| d\mu(\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} |(u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta) + (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta)| d\mu(\theta) \\ &\leq \int_0^{2\pi} |u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta| d\mu(\theta) + \int_0^{2\pi} |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta| d\mu(\theta) \\ &= L_\mu(u) + L_\mu(v). \end{aligned}$$

- POSITIVITA':

Certamente, dalla stessa definizione di  $L_\mu$ , abbiamo subito che  $L_\mu(v_1, v_2) \geq 0$  per ogni  $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ . Resta però da verificare che

$$L_\mu(v_1, v_2) = 0 \iff (v_1, v_2) = 0$$

L'implicazione ( $\Leftarrow$ ) è banale. Quanto all'altra implicazione, procediamo per assurdo, supponendo dunque che il vettore  $(v_1, v_2)$  sia non nullo e mostrando che da ciò segue  $L_\mu(v_1, v_2) > 0$ .

Dato che  $(v_1, v_2) \neq 0$ , esistono solo due valori di  $\theta$ , antipodali, tali che il prodotto scalare tra  $(v_1, v_2)$  e  $(\cos \theta, \sin \theta)$  sia nullo. Chiamiamo  $\bar{\theta}$  e  $\bar{\theta} + \pi$  tali unici due valori.

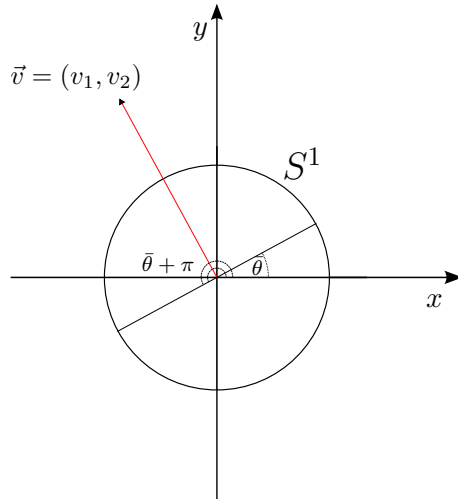


Figura 3.1

La funzione non negativa  $\theta \mapsto |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta|$  si annulla dunque solo per  $\theta = \bar{\theta}$  e  $\theta = \bar{\theta} + \pi$ . Dato che, per ipotesi, il supporto di  $\mu$  non è contenuto in  $\{\bar{\theta}, \bar{\theta} + \pi\}$ , risulta

$$\int_0^{2\pi} |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta| d\mu(\theta) > 0.$$

□

### 3.2 Coseno-trasformata di funzioni

Analizziamo ora, in particolare, le misure finite  $\mu$  su  $S^1$  della forma  $f(\theta) d\theta$ , con  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  sommabile.

Indicando semplicemente con  $L_f$  l'applicazione  $L_{fd\theta}$ , possiamo facilmente riformulare in termini di funzioni tutto ciò che in precedenza avevamo formulato in termini di misure.

**Definizione 3.2.1.** Data  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  sommabile, per ogni  $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ , poniamo

$$L_f(v_1, v_2) = \int_0^{2\pi} |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta| f(\theta) d\theta.$$

L'applicazione  $L_f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  così definita è detta *coseno-trasformata* di  $f$ .

**Definizione 3.2.2.** Data una funzione  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , diremo che

$$f \text{ è } \pi \text{ anti-periodica se } f(\theta + \pi) = -f(\theta) \text{ per ogni } \theta \in S^1.$$

Diremo poi banalmente che  $f$  è  $\pi$ -periodica se  $f(\theta + \pi) = f(\theta)$  per ogni  $\theta \in S^1$ .

Tipiche funzioni  $\pi$  anti-periodiche sono le funzioni trigonometriche *seno* e *coseno*.

In perfetta analogia con quanto visto per le misure pari e dispari, possiamo osservare che:

- ogni funzione  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  può essere scritta come somma di una funzione  $\pi$ -periodica e di una  $\pi$  anti-periodica:

$$f(\theta) = \frac{f(\theta) + f(\theta + \pi)}{2} + \frac{f(\theta) - f(\theta + \pi)}{2};$$

- se  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  è  $\pi$  anti-periodica, allora  $L_f \equiv 0$  (in quanto la misura  $fd\theta$  è dispari);
- se  $f$  è positiva e, ad esempio, continua ma non identicamente nulla, allora  $L_f$  è una norma sul piano.

L'ultima asserzione segue dal fatto che una funzione  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  positiva, continua e non identicamente nulla è di certo strettamente positiva su un insieme non trascurabile per la misura di Lebesgue su  $S^1$  (poiché  $f > 0$  su un aperto di  $S^1$ ).

Senza perdita di generalità, potremo dunque studiare solo le coseno-trasformate delle funzioni  $f$   $\pi$ -periodiche.

### 3.2.1 In coordinate polari...

Come noto, un sistema di coordinate molto utile in  $\mathbb{R}^2$  è il sistema di coordinate polari. Se un punto  $P$  si scrive come  $(v_1, v_2)$  in coordinate cartesiane ed  $(r, \phi)$  in coordinate polari, allora:

$$\begin{cases} v_1 = r \cos \phi \\ v_2 = r \sin \phi \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\ \phi = \arg(v_1 + i v_2) \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

Ci chiediamo dunque quale sia l'espressione della coseno-trasformata di una funzione  $f$  in coordinate polari. Prima di rispondere a questa domanda, vediamo un utile lemma.

**Lemma 3.2.3.** *Sia  $g : S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1$  e siano inoltre  $\alpha, \beta : S^1 \rightarrow S^1$  altre due funzioni, anch'esse di classe  $C^1$ . Posta*

$$F(\phi) = \int_{\alpha(\phi)}^{\beta(\phi)} g(\phi, \theta) d\theta \quad \forall \phi \in S^1,$$

vale

$$\frac{\partial F}{\partial \phi}(\phi) = g(\phi, \beta(\phi)) \beta'(\phi) - g(\phi, \alpha(\phi)) \alpha'(\phi) + \int_{\alpha(\phi)}^{\beta(\phi)} \frac{\partial g}{\partial \phi}(\phi, \theta) d\theta. \quad (3.1)$$

*Dimostrazione.* Si tratta di una semplice applicazione del teorema fondamentale del calcolo integrale e della derivazione di funzioni composte in più variabili.

Poniamo, per comodità,

$$G(a, b, t) = \int_a^b g(t, \theta) d\theta.$$

Possiamo allora scrivere che  $F(\phi) = G(\alpha(\phi), \beta(\phi), \phi)$ , da cui

$$\frac{\partial F}{\partial \phi}(\phi) = \frac{\partial G}{\partial a}(\alpha(\phi), \beta(\phi), \phi) \alpha'(\phi) + \frac{\partial G}{\partial b}(\alpha(\phi), \beta(\phi), \phi) \beta'(\phi) + \frac{\partial G}{\partial t}(\alpha(\phi), \beta(\phi), \phi).$$

Osservando, però, dal teorema fondamentale del calcolo, che

$$\frac{\partial G}{\partial a}(a, b, \varphi) = -g(\varphi, a), \quad \frac{\partial G}{\partial b}(a, b, \varphi) = g(\varphi, b)$$

ed inoltre che, per il teorema di Lebesgue,  $\frac{\partial G}{\partial t}(a, b, \phi) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(\phi, \theta) d\theta$

(segue dal fatto che  $\partial g / \partial t$  è continua, e dunque limitata, su  $S^1$ ),

otteniamo immediatamente la tesi.  $\square$

**Proposizione 3.2.4.** *Sia  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione sommabile e  $\pi$ -periodica. Allora, in coordinate polari  $(r, \phi)$ , la coseno-trasformata di  $f$  si esprime come*

$$L_f(r, \phi) = 2r \int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} \cos(\theta - \phi) f(\theta) d\theta .$$

Se inoltre  $f$  è di classe  $C^1$ , per ogni  $\phi \in S^1$  vale

$$f(\phi + \pi/2) = \frac{1}{4r} \left( L_f(r, \phi) + \frac{\partial^2 L_f}{\partial \phi^2}(r, \phi) \right) . \quad (3.2)$$

*Dimostrazione.* Calcoliamo l'espressione di  $L_f$  in coordinate polari.

Ovviamente, con abuso di notazione, indicheremo sempre con  $L_f$  la coseno-trasformata di  $f$ , anche se utilizziamo le coordinate polari: a seconda degli argomenti,  $(v_1, v_2)$  o  $(r, \phi)$ , sarà evidente quando utilizziamo le coordinate cartesiane e quando quelle polari.

Abbiamo così:

$$L_f(r, \phi) = \int_0^{2\pi} |r \cos \phi \cos \theta + r \sin \phi \sin \theta| f(\theta) d\theta = r \int_0^{2\pi} |\cos(\theta - \phi)| f(\theta) d\theta$$

Ma

$$\begin{cases} \cos(\theta - \phi) \geq 0 & \text{per } \phi - \pi/2 \leq \theta \leq \phi + \pi/2 \\ \cos(\theta - \phi) \leq 0 & \text{per } \phi + \pi/2 \leq \theta \leq \phi + 3\pi/2 \end{cases}$$

Dunque, data la  $2\pi$  periodicità dell'integrando, per ogni  $\phi \in S^1$  possiamo scrivere

$$\begin{aligned} L_f(r, \phi) &= r \int_{\phi - \pi/2}^{\phi + 3\pi/2} |\cos(\theta - \phi)| f(\theta) d\theta \\ &= r \int_{\phi - \pi/2}^{\phi + \pi/2} \cos(\theta - \phi) f(\theta) d\theta - r \int_{\phi + \pi/2}^{\phi + 3\pi/2} \cos(\theta - \phi) f(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Dato però che, dalle ipotesi, la funzione  $\cos(\theta - \phi) f(\theta)$  è  $\pi$  anti-periodica, l'espressione di  $L_f$  diventa

$$\begin{aligned} L_f(r, \phi) &= r \int_{\phi - \pi/2}^{\phi + \pi/2} \cos(\theta - \phi) f(\theta) d\theta + r \int_{\phi - \pi/2}^{\phi + \pi/2} \cos(\theta - \phi) f(\theta) d\theta \\ &= 2r \int_{\phi - \pi/2}^{\phi + \pi/2} \cos(\theta - \phi) f(\theta) d\theta . \end{aligned}$$

Quanto alla seconda affermazione, si tratta semplicemente di una doppia applicazione del lemma precedente. Scelte dapprima

$$\alpha(\phi) = \phi - \pi/2, \quad \beta(\phi) = \phi + \pi/2 \quad \text{e} \quad g(\phi, \theta) = 2r \cos(\theta - \phi) f(\theta) ,$$

dalla (3.1) troviamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_f}{\partial \phi}(r, \phi) &= 2r \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) f\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) - 2r \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) f\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + 2r \int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} \sin(\theta - \phi) f(\theta) d\theta \\ &= 2r \int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} \sin(\theta - \phi) f(\theta) d\theta . \end{aligned}$$

Riapplicando nuovamente il lemma, stavolta alla funzione

$$g(\phi, \theta) = 2r \sin(\theta - \phi) f(\theta) ,$$

troviamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L_f}{\partial \phi^2} &= 2r \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) f\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) - 2r \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) f\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - 2r \int_{\phi - \pi/2}^{\phi + \pi/2} \cos(\theta - \phi) f(\theta) d\theta \\ &= 4r f(\phi + \pi/2) - L_f(r, \phi) \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio, abbiamo sfruttato la  $\pi$ -periodicit  della funzione  $f$ .  $\square$

La proposizione appena vista ci permette di dire che l'applicazione  $L$ , se ristretta allo spazio delle funzioni  $\pi$ -periodiche di classe  $C^2$ ,   iniettiva: nota  $L_f$ , abbiamo una formula esplicita per ricavare  $f$ .

Ma quali applicazioni  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  possono essere scritte come coseno-trasformata di una opportuna funzione? Nel prossimo paragrafo daremo una risposta parziale a questa domanda.

### 3.3 Coseno-trasformata e norme di Legendre

Supponiamo di avere una funzione  $f$  non nulla, definita su  $S^1$  a valori reali. Abbiamo visto che se  $f$    anche positiva e continua (possiamo supporre inoltre  $f$   $\pi$ -periodica senza perdita di generalit ), allora la coppia  $(\mathbb{R}^2, L_f)$    uno spazio normato.

D'ora in poi, restringeremo sempre la coseno-trasformata di funzioni alle sole  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$ ,  $\pi$ -periodiche e comunque non negative. In particolare, dalla proposizione 3.2.4, sappiamo che sotto queste ipotesi si ha

$$L_f(r, \phi) = 2r \int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} \cos(\phi - \theta) f(\theta) d\theta ; \quad (3.3)$$

inoltre, nota  $L_f$ , abbiamo anche

$$f(\theta) = \frac{1}{4r} \left( L_f(r, \theta - \pi/2) + \frac{\partial^2 L_f}{\partial \phi^2}(r, \theta - \pi/2) \right). \quad (3.4)$$

L'identità (3.4) ci dice anche che il suo secondo membro è indipendente da  $r$ : ciò, tuttavia, può ugualmente essere ricavato come immediata conseguenza del fatto che  $L_f$  sia una funzione 1-omogenea in  $r$ .

*Osservazione 3.3.1.* Se  $F$  è una norma sul piano di classe  $C^\infty$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ , ponendo

$$f(\theta) = \frac{1}{4} \left( F(1, \theta - \pi/2) + \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}(1, \theta - \pi/2) \right),$$

come coseno-trasformata di  $f$  otteniamo proprio la norma  $F$  di partenza.

Per verificarlo, osserviamo innanzitutto che  $f$  è una funzione  $\pi$ -periodica: si tratta di una immediata conseguenza del fatto che  $F$  sia una norma.

A questo punto, dalla (3.3), sappiamo che l'applicazione  $L_f$ , in coordinate polari, assume la forma

$$\begin{aligned} L_f(r, \phi) &= 2r \int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} \cos(\theta - \phi) f(\theta) d\theta \\ &= \frac{r}{2} \int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} \cos(\theta - \phi) F\left(1, \theta - \frac{\pi}{2}\right) d\theta + \frac{r}{2} \int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} \cos(\theta - \phi) \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}\left(1, \theta - \frac{\pi}{2}\right) d\theta. \end{aligned}$$

Ricordando però la 1-omogeneità in  $r$  delle funzioni  $F$  e  $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$ , l'espressione di  $L_f(r, \phi)$  diventa

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} \cos(\theta - \phi) F\left(r, \theta - \frac{\pi}{2}\right) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} \cos(\theta - \phi) \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}\left(r, \theta - \frac{\pi}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sin(\theta - \phi) F\left(r, \theta - \frac{\pi}{2}\right) \right]_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} \sin(\theta - \phi) \frac{\partial F}{\partial \theta}\left(r, \theta - \frac{\pi}{2}\right) d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \cos(\theta - \phi) \frac{\partial F}{\partial \theta}\left(r, \theta - \frac{\pi}{2}\right) \right]_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} \sin(\theta - \phi) \frac{\partial F}{\partial \theta}\left(r, \theta - \frac{\pi}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sin(\theta - \phi) F\left(r, \theta - \frac{\pi}{2}\right) \right]_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} [F(r, \phi) + F(r, \phi - \pi)]. \end{aligned}$$

Infine, dato che  $F(r, \phi + \pi) = F(r, \phi)$ , possiamo concludere come volevamo che

$$L_f(r, \phi) = F(r, \phi) \quad \forall r \geq 0, \forall \phi \in S^1.$$



Ciò che adesso vogliamo vedere è quale relazione sussista tra le coseno-trasformate di funzioni  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  e le norme su  $\mathbb{R}^2$  di classe  $C^\infty$ , che soddisfano la condizione di Legendre.

**Teorema 3.3.2.** *Sia  $\mathcal{B}$  il seguente insieme di funzioni:*

$$\mathcal{B} = \{g : S^1 \rightarrow \mathbb{R} \text{ } \pi\text{-periodiche} \mid g > 0 \text{ e } g \in C^\infty(S^1)\}.$$

*La coseno-trasformata  $L$ ,  $L(f) = L_f$ , stabilisce una bigezione tra l'insieme  $\mathcal{B}$  e le norme  $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\})$  che soddisfano la condizione di Legendre.*

*Dimostrazione.* Sia  $L$  la mappa coseno-trasformata e sia  $N$  la mappa che, ad una norma  $F$  sul piano di classe  $C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\})$ , associa la funzione  $f = N(F)$  definita da

$$f(\theta) = \frac{1}{4} \left( F(1, \theta - \pi/2) + \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}(1, \theta - \pi/2) \right). \quad (3.5)$$

Allora:

1. dall'osservazione 3.3.1, sappiamo che  $(L \circ N)(F) = F$  per ogni  $F$  di classe  $C^2$  sul piano meno l'origine;
2. dalla proposizione 3.2.4, e in particolare dall'equazione (3.2), sappiamo invece che  $(N \circ L)(f) = f$  per ogni funzione  $f$  di classe  $C^2(S^1)$ .

Ciò mostra effettivamente che la mappa  $N$  è l'inversa della coseno-trasformata, sotto le opportune ipotesi di regolarità appena viste degli elementi dei domini delle due mappe. Il teorema è dunque dimostrato se facciamo vedere che la mappa  $L$  manda, surgettivamente, l'insieme  $\mathcal{B}$  nell'insieme delle norme  $C^\infty$  di Legendre.

Intanto, possiamo affermare che se  $f \in C^\infty(S^1)$  allora la funzione  $L(f)$  è anch'essa  $C^\infty$  come funzione di due variabili, tranne al più che nell'origine. Ciò segue dall'espressione di  $L(f)$ ,

$$L(f)(v_1, v_2) = \int_0^{2\pi} |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta| f(\theta) d\theta,$$

ricordando che la funzione  $|\cdot|$  è differenziabile ovunque (anzi è  $C^\infty$ ), tranne che nell'origine.

Viceversa, se  $F$  è una norma  $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\})$ , allora, dalla (3.5), si deduce subito che  $N(F)$  è una funzione  $C^\infty$  sulla circonferenza,  $\pi$ -periodica.

Il teorema è dunque dimostrato se verifichiamo che la funzione

$$f(\theta) = \frac{1}{4} \left( F(1, \theta - \pi/2) + \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}(1, \theta - \pi/2) \right)$$

è positiva se e solo se  $F$  è una norma che soddisfa la condizione di Legendre.

Per prima cosa, data una norma  $F$  di classe  $C^\infty$  sul piano meno l'origine, sia

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) < 1\}$$

la palla unitaria della norma  $F$  e sia  $\partial B$  la sua frontiera.

Allora la matrice hessiana di  $F^2$  è definita positiva in ogni punto del piano meno l'origine se e solo se la curva liscia  $\partial B$  ha curvatura strettamente positiva in ogni suo punto.

Parametrizziamo  $\partial B$  con  $\gamma(\phi) = r(\phi) (\cos \phi, \sin \phi)$ , al variare di  $\phi$  in  $[0, 2\pi]$ . Si tratta adesso di trovare l'espressione di  $r(\phi)$  in funzione della norma  $F$ .

Ma sappiamo, per definizione, che  $F(\gamma(\phi)) \equiv 1$ , cioè ancora

$$F(r(\phi) \cos \phi, r(\phi) \sin \phi) \equiv 1.$$

Dato che  $F$  è una norma, questa condizione si riscrive come  $r(\phi) F(\cos \phi, \sin \phi) = 1$ , da cui, scrivendo l'espressione di  $F$  in coordinate polari,

$$r(\phi) = \frac{1}{F(1, \phi)}.$$

Il segno della curvatura di  $\gamma$  è dato dal segno del prodotto vettoriale  $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}$ , dove l'ultima espressione rappresenta il determinante della matrice  $2 \times 2$  che ha per colonne i vettori  $\dot{\gamma}$  e  $\ddot{\gamma}$ .

Essendo nel nostro caso  $\gamma(\phi) = r(\phi)(\cos \phi, \sin \phi)$ , troviamo

$$\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}(\phi) = r(\phi)^2 + 2(r'(\phi))^2 - r(\phi)r''(\phi). \quad (3.6)$$

Inoltre, in funzione di  $F$ , abbiamo visto che vale  $r(\phi) = \frac{1}{F(1, \phi)}$ , da cui:

$$r' = -\frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial \phi} \quad \text{ed} \quad r'' = \frac{2}{F^3} \left( \frac{\partial F}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{1}{F^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}.$$

Svolgendo allora i calcoli per  $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}$ , dalla (3.6) troviamo

$$\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}(\phi) = \frac{1}{F(1, \phi)^3} \left( F(1, \phi) + \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}(\phi) \right).$$

Abbiamo dunque concluso: essendo  $F(1, \phi)^3$  sempre positivo, risulta evidente che la funzione

$$f(\theta) = \frac{1}{4} \left( F(1, \theta - \pi/2) + \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}(1, \theta - \pi/2) \right)$$

è sempre positiva se e solo se la quantità  $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}$  lo è: in altri termini, come volevamo,  $f > 0$  se e solo se la matrice hessiana di  $F$  è definita positiva. Questo prova il teorema.  $\square$

L'importanza del precedente teorema sta nel fatto che esso fornisce un risultato di rappresentazione per le norme  $C^\infty$  di Legendre: ognuna di esse può essere rappresentata in un unico modo come coseno-trasformata di una opportuna funzione positiva,  $C^\infty$  e  $\pi$ -periodica su  $S^1$ : se  $F$  è la norma in questione, allora

$$F(v_1, v_2) = \int_0^{2\pi} |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta| f(\theta) d\theta .$$



## Capitolo 4

# Risoluzione analitica del problema

### 4.1 Il teorema di Hamel

Possiamo adesso finalmente trovare delle condizioni equivalenti al fatto che una data metrica Finsler  $L$  sia proiettiva. A tal proposito, andiamo subito ad analizzare il seguente risultato dovuto ad Hamel.

Si tratta di una vera e propria caratterizzazione delle metriche  $L$  proiettive, che però non fornisce una espressione esplicita per esse. Tuttavia questo risultato, unitamente a quelli dei capitoli precedenti, sarà di fondamentale importanza per poter arrivare, nella seguente sezione, ad una espressione analitica esplicita delle metriche Finsler proiettive.

**Teorema 4.1.1** (Hamel). *Sia  $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una metrica Finsler su  $\mathbb{R}^2$ , di argomenti  $(x_1, x_2, v_1, v_2)$ .*

*$L$  è proiettiva se e solo se è soddisfatta la seguente equazione alle derivate parziali:*

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial v_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial v_1},$$

*in ogni punto  $(x_1, x_2, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ .*

*Dimostrazione.* Ricordiamo intanto che la proiettività di una metrica Finsler, grazie alla condizione di uniforme convessità di quest'ultima, è equivalente al fatto che tutte le rette del piano siano geodetiche per essa.

Inoltre, dal Teorema 2.2.6, sappiamo che una curva  $\gamma$  è una geodetica per  $L$  se e soltanto se soddisfa le seguenti due equazioni di Eulero-Lagrange per  $L$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_1}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_2}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0. \quad (4.2)$$

In virtù di queste due osservazioni, il teorema è dimostrato se verifichiamo che ogni retta del piano soddisfa le due equazioni di Eulero-Lagrange se e soltanto se è verificata l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial v_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial v_1}. \quad (4.3)$$

Procediamo dunque alla dimostrazione.

Una parametrizzazione (affine) di una generica retta del piano è della forma

$$\gamma(t) = (x_1 + t v_1, x_2 + t v_2),$$

dove  $(v_1, v_2)$  è un vettore non nullo e  $t$  varia in  $\mathbb{R}$ , o in un intervallo  $[a, b]$  nel caso in cui consideriamo un segmento piuttosto che una retta.

Vediamo allora come diventano i primi membri delle equazioni di Eulero-Lagrange per una tale  $\gamma$ .

Il vettore  $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$  diventa

$$(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = (x_1 + t v_1, x_2 + t v_2, v_1, v_2).$$

Possiamo ora sfruttare il fatto che  $\frac{\partial L}{\partial x_1}$  e  $\frac{\partial L}{\partial x_2}$  siano funzioni omogenee di grado uno nelle variabili  $(v_1, v_2)$ .

Grazie alla formula di Eulero sulle funzioni omogenee, indipendentemente dal punto  $x = (x_1, x_2)$  di  $\mathbb{R}^2$ , possiamo scrivere che

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x, v_1, v_2) = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial v_1}(x, v_1, v_2) \cdot v_1 + \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial v_2}(x, v_1, v_2) \cdot v_2$$

$$\text{e } \frac{\partial L}{\partial x_2}(x, v_1, v_2) = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial v_1}(x, v_1, v_2) \cdot v_1 + \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial v_2}(x, v_1, v_2) \cdot v_2.$$

Il primo membro dell'equazione (4.1), grazie al fatto che  $\dot{\gamma}(t)$  è identicamente uguale al vettore costante  $(v_1, v_2)$ , diventa perciò

$$\begin{aligned} & \frac{\partial L}{\partial x_1}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_1}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \\ &= \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial v_1}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) v_1 + \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial v_2}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) v_2 - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_1}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)). \end{aligned}$$

Dunque, sviluppando la derivata rispetto al tempo del termine  $\frac{\partial L}{\partial v_1}$  (e tralasciando per brevità i sempre uguali argomenti  $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ , con  $\dot{\gamma}(t)$  costante) possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_1} \\
= & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial v_1} v_1 + \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial v_2} v_2 - \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial v_1} v_1 - \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial v_1} v_2 \\
= & \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial v_2} - \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial v_1} \right] \cdot v_2.
\end{aligned}$$

Nell'espressione di sopra, le derivate parziali seconde di  $L$  sono calcolate su punti della forma  $(x_1 + t v_1, x_2 + t v_2, v_1, v_2)$ .

Similmente, quanto al primo membro della seconda equazione di Eulero-Lagrange (la (4.2)), abbiamo

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(\gamma, \dot{\gamma}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_2}(\gamma, \dot{\gamma}) = \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial v_1}(\gamma, \dot{\gamma}) - \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial v_2}(\gamma, \dot{\gamma}) \right] \cdot v_1.$$

Dunque, l'espressione

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial v_1}(\gamma, \dot{\gamma}) - \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial v_2}(\gamma, \dot{\gamma}),$$

moltiplicata per  $v_1$  o per  $-v_2$ , ci fornisce i primi membri delle due equazioni di Eulero-Lagrange di  $L$ , calcolate lungo la retta  $\gamma$ .

Essendo però il vettore  $(v_1, v_2)$  non nullo, ne deduciamo immediatamente che le due equazioni (4.1) e (4.2) sono soddisfatte se e solo se

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial v_1}(\gamma, \dot{\gamma}) - \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial v_2}(\gamma, \dot{\gamma}) = 0,$$

su ogni vettore  $(\gamma, \dot{\gamma}) = (x_1 + t v_1, x_2 + t v_2, v_1, v_2)$ , con  $(v_1, v_2) \neq 0$  e  $t$  qualunque. Ciò è appunto quello che volevamo dimostrare.  $\square$

## 4.2 Espressione analitica delle Finsler proiettive

Come preannunciato, in questo paragrafo ci proponiamo di fornire una scrittura esplicita delle metriche Finsler che soddisfano il quarto problema di Hilbert.

Per far ciò, dobbiamo richiamare alcuni risultati che abbiamo visto nel precedente capitolo.

In particolare, se abbiamo una norma  $F(v_1, v_2)$  sul piano, di classe  $C^\infty$  tranne che nell'origine e che soddisfi la condizione di Legendre, grazie al Teorema 3.3.2 sappiamo che possiamo rappresentarla come

$$F(v_1, v_2) = \int_0^{2\pi} |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta| f(\theta) d\theta,$$

per un'opportuna unica funzione  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$ , positiva e  $\pi$ -periodica.

Poiché una metrica Finsler  $L$  sul piano, per ogni punto  $(x_1, x_2)$  fissato, non è altro che una norma di Legendre, il risultato appena ricordato ci permette di rappresentare  $L$  in modo unico come

$$L(x_1, x_2, v_1, v_2) = \int_0^{2\pi} |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta| f(x_1, x_2, \theta) d\theta,$$

dove  $f : \mathbb{R}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione  $\pi$ -periodica e  $C^\infty$  nella sua ultima variabile, per ogni  $(x_1, x_2)$  fissato. Inoltre  $f$  risulta ovviamente  $C^\infty$  come funzione complessiva di tre variabili, dato che la metrica  $L$  varia in modo  $C^\infty$  al variare del punto  $(x_1, x_2)$  in  $\mathbb{R}^2$ .

Possiamo perciò studiare la proiettività di una metrica Finsler in termini delle proprietà della corrispondente funzione  $f : \mathbb{R}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  che la rappresenta.

Al Teorema 4.2.2, che ci caratterizza tali funzioni, premettiamo però il seguente lemma di carattere del tutto generale, che torna molto utile nella dimostrazione del suddetto teorema.

**Lemma 4.2.1.** *Sia  $F : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e  $\pi$ -antiperiodica. Allora*

$$\int_\phi^{\phi+\pi} F(\theta) d\theta = 0 \quad \forall \phi \in S^1 \quad \iff \quad F(\theta) \equiv 0.$$

*Dimostrazione.* L'implicazione ( $\Leftarrow$ ) è banale.

Viceversa, supponiamo per assurdo che la funzione  $F$  non sia identicamente nulla: esiste allora un valore  $\theta_0$  tale che  $F(\theta_0) > 0$  (è del tutto equivalente supporre  $F(\theta_0) < 0$ , data la  $\pi$ -antiperiodicità di  $F$ ).

Data la continuità di  $F$ , possiamo riscrivere la condizione di sopra come

$$\exists \theta_1, \theta_2 \in S^1 \text{ tali che } F(\theta) > 0 \quad \forall \theta \in (\theta_1, \theta_2).$$

Di conseguenza, sarà  $F(\theta) < 0$  per ogni  $\theta \in (\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi)$ . L'assurdo è allora presto raggiunto: abbiamo

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} F(\theta) d\theta + \int_{\theta_2}^{\theta_2+\pi} F(\theta) d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi} F(\theta) d\theta + \int_{\theta_1+\pi}^{\theta_2+\pi} F(\theta) d\theta,$$

cioè, dalle ipotesi del lemma,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} F(\theta) d\theta = \int_{\theta_1+\pi}^{\theta_2+\pi} F(\theta) d\theta.$$

Questa identità è evidentemente assurda, per semplici questioni di segno.  $\square$

Veniamo adesso al teorema preannunciato.



**Teorema 4.2.2.** *Sia  $L$  una metrica Finsler sul piano. La funzione  $L$  definisce una metrica proiettiva se e solo se è della forma*

$$L(x_1, x_2, v_1, v_2) = \int_0^{2\pi} |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta| g(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \theta) d\theta,$$

per un'opportuna funzione  $g : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$ .

*Dimostrazione.* Per quanto detto prima, possiamo rappresentare la nostra metrica  $L$  come

$$L(x_1, x_2, v_1, v_2) = \int_0^{2\pi} |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta| f(x_1, x_2, \theta) d\theta,$$

per un'opportuna funzione  $f : \mathbb{R}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$ ,  $\pi$ -periodica nella sua ultima variabile.

A questo punto, grazie alla caratterizzazione fornitaci dal teorema di Hamel, possiamo riformulare ciò che vogliamo dimostrare nel seguente modo:

$$L \text{ SODDISFA } \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial v_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial v_1}$$

$$\text{SE E SOLO SE } f(x_1, x_2, \theta) = g(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \theta),$$

per una opportuna  $g : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$ .

Articoliamo allora la dimostrazione del teorema in più passi.

1. Innanzitutto, data la presenza del valore assoluto internamente all'integrale che definisce  $L$ , una buona idea è quella di passare in coordinate polari nelle ultime due variabili.

L'espressione di  $L$  in coordinate polari è già stata calcolata nel capitolo 3, Proposizione 3.2.4: essa è

$$L(x_1, x_2, r, \phi) = 2r \int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} \cos(\theta - \phi) f(x_1, x_2, \theta) d\theta.$$

Sempre dalla stessa proposizione, conosciamo le espressioni delle derivate parziali prime di  $L$  rispetto al  $r$  e  $\phi$ , che sono

$$\frac{\partial L}{\partial r}(x_1, x_2, r, \phi) = 2 \int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} \cos(\theta - \phi) f(x_1, x_2, \theta) d\theta, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi}(x_1, x_2, r, \phi) = 2r \int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} \sin(\theta - \phi) f(x_1, x_2, \theta) d\theta. \quad (4.5)$$

Vediamo, adesso, quale sia l'espressione in coordinate polari dell'equazione

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial v_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial v_1}.$$

Ricordando le trasformazioni tra i due sistemi di coordinate,

$$\begin{cases} v_1 = r \cos \phi \\ v_2 = r \sin \phi \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\ \phi = \arg(v_1 + i v_2) \in [0, 2\pi) \end{cases} ,$$

calcoli non difficili mostrano che

$$\frac{\partial r}{\partial v_1} = \cos \phi; \quad \frac{\partial r}{\partial v_2} = \sin \phi; \quad \frac{\partial \phi}{\partial v_1} = -\frac{\sin \phi}{r}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial v_2} = \frac{\cos \phi}{r}.$$

Dunque, essendo

$$\frac{\partial}{\partial v_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial x_1} \frac{\partial r}{\partial v_2} + \frac{\partial^2 L}{\partial \phi \partial x_1} \frac{\partial \phi}{\partial v_2} = \sin \phi \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial x_1} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial^2 L}{\partial \phi \partial x_1},$$

$$\frac{\partial}{\partial v_1} \left( \frac{\partial L}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial x_2} \frac{\partial r}{\partial v_1} + \frac{\partial^2 L}{\partial \phi \partial x_2} \frac{\partial \phi}{\partial v_1} = \cos \phi \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial x_2} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial^2 L}{\partial \phi \partial x_2},$$

la condizione  $\frac{\partial^2 L}{\partial v_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial v_1 \partial x_2}$  si riscrive come

$$\sin \phi \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial x_1} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial^2 L}{\partial \phi \partial x_1} = \cos \phi \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial x_2} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial^2 L}{\partial \phi \partial x_2}. \quad (4.6)$$

2. Sostituiamo dunque, nell'equazione (4.6), le espressioni delle derivate parziali seconde di  $L$ , che si ricavano immediatamente dalla (4.4) e dalla (4.5). Otteniamo la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} & \int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} [\sin \phi \cos(\theta - \phi) + \cos \phi \sin(\theta - \phi)] \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \theta) d\theta \\ &= \int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} [\cos \phi \cos(\theta - \phi) - \sin \phi \sin(\theta - \phi)] \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \theta) d\theta, \end{aligned}$$

cioè ancora, per le formule di addizione trigonometriche,

$$\int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \theta) d\theta = \int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \theta) d\theta.$$

Richiediamo ovviamente che l'uguaglianza di sopra valga per ogni punto  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  e per ogni vettore non nullo, in coordinate polari,  $(r, \phi)$ .

Poiché l'espressione di sopra dipende solo da  $\phi$ , stiamo chiedendo che

$$\int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} \left[ \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \theta) - \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \theta) \right] d\theta = 0 \quad \forall \phi \in S^1.$$

Ma, grazie alle ipotesi di periodicità di  $f$ , la funzione

$$\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \theta) - \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \theta)$$

è  $\pi$ -antiperiodica in  $\theta$  (oltre che ovviamente continua nella stessa variabile).

Dunque, per il lemma precedente,

$$\int_{\phi - \frac{\pi}{2}}^{\phi + \frac{\pi}{2}} \left[ \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \theta) - \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \theta) \right] d\theta = 0 \quad \forall \phi \in S^1$$

se e solo se l'integrando stesso è nullo.

Ricapitolando, abbiamo trovato che

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial v_1 \partial x_2} \iff \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \theta) - \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \theta) \equiv 0$$

3. Il teorema è dunque dimostrato se verificiamo che la funzione  $f$  soddisfa

$$\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \theta) - \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \theta) = 0$$

se e solo se è della forma

$$g(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \theta), \text{ con } g : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Esaminiamo separatamente entrambe le implicazioni.

- Se  $f(x_1, x_2, \theta) = g(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \theta)$ , allora

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \theta) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \theta) \cos \theta \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \theta) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \theta) \sin \theta \end{cases}.$$

$$\text{Banalmente dunque } \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \theta) - \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \theta) = 0.$$

- Viceversa, supponiamo che, per ogni valore di  $\theta$ , valga

$$\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \theta) - \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \theta) = 0.$$

Fissiamo un valore  $\theta$  di  $S^1$  e consideriamo perciò la funzione  $f$  come sola funzione delle due variabili  $x_1$  e  $x_2$ .

Posto  $u = (\cos \theta, \sin \theta)$ , l'espressione di sopra ci dice che il gradiente della funzione  $f$ , in ogni punto  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , è parallelo ad  $u$ : infatti

$$\langle \nabla f(x_1, x_2), Ju \rangle = 0,$$

dove  $J$  è la matrice di rotazione (di un angolo  $+\pi/2$ )

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ciò vuol dire che la funzione  $f$  è costante lungo le rette del piano ortogonali alla retta  $r$  generata da  $u$ .

Possiamo verificare quest'asserzione anche nel seguente modo: sia  $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la proiezione ortogonale del piano sulla retta  $r$ , cioè

$$P(x) = \langle x, u \rangle u = (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) u.$$

Allora

$$\begin{aligned} f(x) &= f(P(x)) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(P(x) + t(x - P(x))) dt \\ &= f(P(x)) + \int_0^1 \langle \nabla f[P(x) + t(x - P(x))], x - P(x) \rangle dt \\ &= f(P(x)), \end{aligned} \tag{4.7}$$

in quanto il vettore  $x - P(x)$  è, per definizione di  $P$ , ortogonale ad  $u$  (ovvero parallelo a  $Ju$ ).

I valori di  $f$  sono dunque determinati dai valori che essa assume sulla retta  $r$ . Chiamiamo  $g$  la funzione di una variabile che rappresenta la restrizione di  $f$  alla sola retta generata da  $u$ ,

$$g(t) = f(t \cdot u). \tag{4.8}$$

La regolarità  $C^\infty$  di  $f$  si trasferisce immediatamente sulla funzione  $g$ . Abbiamo allora, in virtù della (4.7) e della (4.8), che

$$f(x) = f(P(x)) = f((x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) u) = g(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta).$$

Considerando però che l'arbitrario valore di  $\theta$  inizialmente fissato era in realtà un argomento della funzione  $f$  e considerato anche che quanto trovato vale per ogni  $\theta \in S^1$ , possiamo scrivere che esiste una funzione  $g$  di due variabili,  $g: \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$ , tale che

$$f(x, \theta) = g(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \theta).$$

□

## Capitolo 5

# Formula di Crofton e distanze proiettive

Nel precedente capitolo, siamo riusciti a dare una caratterizzazione analitica delle metriche Finsler *proiettive*, scoprendo che esse sono tutte e sole quelle della forma

$$L(x_1, x_2, v_1, v_2) = \int_0^{2\pi} |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta| f(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \theta) d\theta,$$

con  $f : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  funzione  $C^\infty$ , positiva e  $\pi$ -periodica nella seconda variabile.

In questo capitolo, invece, affronteremo il quarto problema di Hilbert da un punto di vista più generale: ci proponiamo infatti di costruire delle distanze su  $\mathbb{R}^2$  (non necessariamente indotte da una struttura Finsler) tali che, per ogni coppia di punti  $P$  e  $Q$ , la curva più breve che congiunga i due punti sia il segmento.

Risulta dunque necessario ricordare che, in uno spazio metrico, la lunghezza di una curva si ottiene come estremo superiore delle lunghezze delle poligonali con vertici su essa. A questo punto, per una distanza  $d$  su  $\mathbb{R}^2$ , possiamo dare la seguente definizione di proiettività.

**Definizione 5.0.3.** Una funzione distanza  $d$  sul piano si dice *proiettiva* se, per ogni coppia di punti, la curva di minima lunghezza congiungente i due punti è il segmento.

Nel seguito, ci proponiamo dunque di costruire delle distanze proiettive in  $\mathbb{R}^2$ . Lo strumento principale che utilizzeremo a tal fine è la formula di Crofton, che esamineremo in seguito nella sezione 5.2. Prima, però, è necessario introdurre lo spazio delle *rette orientate*.

### 5.1 Lo spazio delle rette orientate

Consideriamo l'insieme  $\mathcal{O}$  di tutte le rette ORIENTATE del piano. Ogni elemento in  $\mathcal{O}$  può essere rappresentato attraverso una coppia  $(\theta, p)$  di elementi di  $S^1 \times \mathbb{R}$ ,

definiti come segue.

Sia  $v$  il vettore unitario che rappresenta la direzione della retta in questione. Allora:

1. l'angolo  $\theta$  è quello che  $v$  forma col verso positivo dell'asse delle ascisse;
2. il numero reale  $p$  rappresenta la distanza, dotata di segno, della retta dall'origine.

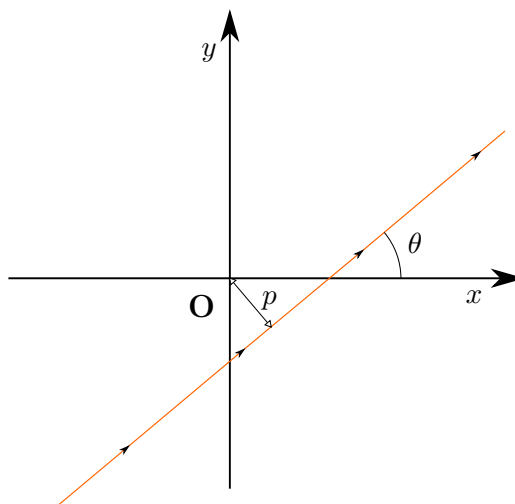


Figura 5.1: Le coordinate  $(p, \theta)$  in  $\mathcal{O}$

Sebbene, da un lato, l'angolo  $\theta$  risulti ben definito (quantomeno come elemento di  $S^1$ ), resta dall'altro da chiarire come determinare il segno di  $p$ .

Adottiamo a tal proposito la seguente convenzione: se, percorrendo la retta nel verso della sua orientazione, l'origine di  $\mathbb{R}^2$  rimane a sinistra della retta (come nell'esempio in Figura 5.1), allora il parametro  $p$  sarà positivo; in caso contrario, esso sarà negativo.

Questo, appunto, ci fornisce una identificazione dello spazio delle rette orientate col prodotto cartesiano  $S^1 \times \mathbb{R}$ .

Se pensiamo però ad  $S^1 \times \mathbb{R}$  come al cilindro  $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$  e identifichiamo  $\mathbb{R}^2$  col piano  $\{z = 0\}$  di  $\mathbb{R}^3$ , allora l'identificazione appena descritta può essere espressa nel seguente modo, del tutto equivalente.

Data la retta orientata  $r$  nel piano  $\{z = 0\}$ , siano:

- $v$  il versore direzione di  $r$ ;
- $q$  il vettore che congiunge l'origine al punto di  $r$  ad esso più vicino (risulta perciò  $q \perp v$ ).

Associamo allora a tale retta il punto

$$v + (\vec{q} \times \vec{v}) \in \{x^2 + y^2 = 1\}.$$

Le due identificazioni sono in realtà la stessa: se  $(\theta, p)$  sono i parametri che rappresentano una data retta di  $\mathcal{O}$ , allora il punto del cilindro ad essa corrispondente (attraverso l'identificazione appena descritta) sarà  $(\cos \theta, \sin \theta, p)$ , che non è altro che il punto  $(\theta, p) \in S^1 \times \mathbb{R}$ .

Ci chiediamo adesso come cambino le coordinate  $(\theta, p)$  di una retta orientata sotto una trasformazione euclidea (cioè sotto una isometria).

**Proposizione 5.1.1.** *Siano  $(\theta, p)$  le coordinate di una retta orientata del piano. Allora:*

- ruotando la retta, in senso antiorario, di un angolo  $\phi$  attorno all'origine, otteniamo la retta di coordinate  $(\theta + \phi, p)$ ;
- traslandola invece di un vettore  $\vec{h} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ , la retta ottenuta avrà coordinate  $(\theta, p + a \sin \theta - b \cos \theta)$ .

*Dimostrazione.* Il primo dei due punti è davvero banale:

effettuando una rotazione nel piano, attorno all'origine, la distanza della retta dall'origine non cambia, mentre la sua direzione varia esattamente dell'angolo  $\phi$  di cui è stata fatta la rotazione.

Passiamo invece al secondo punto.

Data la retta  $(\theta, p)$ , siano come al solito  $v$  e  $q$  i vettori direzione e distanza dall'origine della retta (sarà dunque  $p = \pm \|q\|$ ).

Distinguiamo a questo punto per comodità due casi, che si trattano in maniera del tutto analoga.

- Caso  $p \geq 0$ .

L'ipotesi  $p \geq 0$  può facilmente essere tradotta nella condizione che la coppia ortogonale  $(q, v)$  sia positivamente orientata nel piano. Dunque

$$v = (\cos \theta, \sin \theta) \implies \frac{q}{\|q\|} = (\sin \theta, -\cos \theta)$$

Dato che la retta è ortogonale a  $q$ , la componente del vettore  $\vec{h}$  di cui essa viene effettivamente traslata è solo quella parallela a  $q$ .

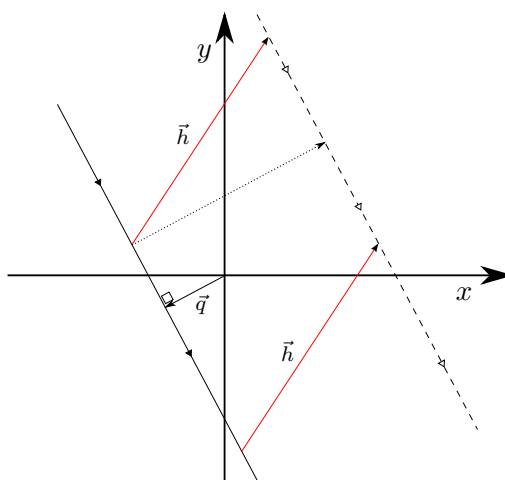


Figura 5.2

In altri termini, traslare la retta del vettore  $\vec{h}$  è equivalente a traslarla del solo vettore

$$\left\langle h, \frac{q}{\|q\|} \right\rangle \cdot \vec{q} = (a \sin \theta - b \cos \theta) \vec{q}$$

La distanza della retta dall'origine sarà perciò cambiata della quantità (positiva o negativa)

$$a \sin \theta - b \cos \theta.$$

Dato che, attraverso la traslazione, la direzione della retta originale non è cambiata, le nuove coordinate della retta sono

$$(\theta, p + a \sin \theta - b \cos \theta).$$

- Caso  $p \leq 0$ .

Come già detto, la trattazione di questo caso è simile alla precedente: stavolta, però, dato che  $p$  è negativo si ha:

$$\frac{q}{\|q\|} = (-\sin \theta, \cos \theta).$$

Se, ad esempio, il prodotto scalare  $\left\langle h, \frac{q}{\|q\|} \right\rangle$  è positivo, ci aspettiamo un allontanamento della retta dall'origine; essendo però  $p \leq 0$ , ciò vuol dire che esso dovrà essere sottratto a  $p$  (in modo che il modulo di  $p$  aumenti). Allo stesso modo, se la quantità  $\left\langle h, \frac{q}{\|q\|} \right\rangle$  è negativa, un simile ragionamento porta a concludere che essa deve comunque essere sottratta a  $p$ .

Le nuove coordinate della retta saranno perciò

$$\left( \theta, p - \left\langle h, \frac{q}{\|q\|} \right\rangle \right) = (\theta, p + a \sin \theta - b \cos \theta).$$

□



Finora abbiamo indifferentemente identificato lo spazio  $\mathcal{O}$  delle rette orientate con lo spazio prodotto  $S^1 \times \mathbb{R}$  o col cilindro retto  $\{x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ .

La semplice trasformazione che permette di passare dall'uno all'altro spazio è

$$(\theta, p) \longmapsto (\cos \theta, \sin \theta, p)$$

Sia ora  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}$  un insieme di rette orientate, parametrizzato da una opportuna regione  $\mathcal{R}$  di  $S^1 \times \mathbb{R}$ : nel cilindro  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ , l'area corrispondente alle rette di  $\mathcal{A}$  è semplicemente

$$\text{Area}(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{R}} dp d\theta.$$

Questa asserzione segue dal fatto che il modulo del prodotto vettoriale tra i due vettori derivate parziali (rispetto a  $\theta$  e rispetto a  $p$ ) di  $(\cos \theta, \sin \theta, p)$  è 1.

L'osservazione appena fatta ha una particolare importanza in quanto permette di dimostrare il seguente risultato.

**Proposizione 5.1.2.** *Sia  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una trasformazione euclidea del piano e sia  $\mathcal{A}$  un certo insieme di rette orientate, parametrizzato da  $\mathcal{R} \subseteq S^1 \times \mathbb{R}$ . Sul cilindro  $\{x^2 + y^2 = 1\}$ , le aree corrispondenti agli insiemi di rette  $\mathcal{A}$  e  $T(\mathcal{A})$  sono uguali.*

*Dimostrazione.* Dato che ogni trasformazione euclidea nel piano è composizione di una rotazione e di una traslazione, possiamo mostrare la tesi separatamente in questi due casi.

1. Sia  $T$  una rotazione di un angolo  $\phi$ , svolta in senso antiorario attorno all'origine di  $\mathbb{R}^2$ .

Allora, grazie alla precedente proposizione, sappiamo che l'insieme  $T(\mathcal{A})$  è parametrizzato da

$$T(\mathcal{R}) = \{T(\theta, p) \mid (\theta, p) \in \mathcal{R}\} = \{(\theta + \phi, p) \mid (\theta, p) \in \mathcal{R}\}.$$

L'applicazione  $(\theta, p) \longmapsto (\theta + \phi, p)$  ha però determinante dello Jacobiano uguale ad 1.

Grazie all'osservazione precedente e al teorema di cambiamento di variabili, otteniamo allora

$$\text{Area}(T(\mathcal{A})) = \int_{T(\mathcal{R})} dp d\theta = \int_{\mathcal{R}} |1| dp d\theta = \text{Area}(\mathcal{A}).$$

2. Sia invece adesso  $T$  l'applicazione che, ad ogni vettore  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , associa il nuovo vettore  $(x + a, y + b)$ .

Sappiamo che l'insieme  $T(\mathcal{A})$  è parametrizzato da

$$T(\mathcal{R}) = \{(\theta, p + a \sin \theta - b \cos \theta) \mid (\theta, p) \in \mathcal{R}\}.$$

La matrice Jacobiana dell'applicazione

$$(\theta, p) \mapsto (\theta, p + a \sin \theta - b \cos \theta),$$

è, in forma canonica, 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a \cos \theta + b \sin \theta & 1 \end{pmatrix}.$$

Nuovamente, essa ha determinante uguale ad 1 e dunque

$$\text{Area}(T(\mathcal{A})) = \int_{T(\mathcal{R})} dp d\theta = \int_{\mathcal{R}} dp d\theta = \text{Area}(\mathcal{A}).$$

□

## 5.2 La formula di Crofton

Fino ad ora, abbiamo semplicemente introdotto lo spazio delle rette orientate ed alcune sue proprietà.

La formula che segue ci dà un modo di misurare la lunghezza euclidea di una curva piana, in funzione del numero delle sue intersezioni con gli elementi di  $\mathcal{O}$ .

**Teorema 5.2.1 (Formula di Crofton).** *Sia  $\Gamma$  il sostegno di una curva piana e indichiamo con  $n_{\Gamma}(\theta, p)$  il numero di intersezioni (eventualmente  $+\infty$ ) tra  $\Gamma$  e la retta corrispondente al punto  $(\theta, p) \in \mathcal{O}$ .*

*La lunghezza euclidea di  $\Gamma$  è data dalla formula*

$$\ell(\Gamma) = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{O}} n_{\Gamma}(\theta, p) d\theta dp. \quad (5.1)$$

*Dimostrazione.* Cominciamo innanzitutto con l'osservare che basta dimostrare la formula nel caso in cui  $\Gamma$  sia una curva poligonale: ciò segue immediatamente dalla stessa definizione di lunghezza di una curva.

Inoltre, se  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  sono due segmenti, considerata la loro giunzione  $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$ , allora:

1. da un lato, la lunghezza euclidea di  $\Gamma$  è la somma di quelle di  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ ;
2. dall'altro,

$$\frac{1}{4} \int_{\mathcal{O}} n_{\Gamma}(\theta, p) d\theta dp = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{O}} n_{\Gamma_1}(\theta, p) d\theta dp + \frac{1}{4} \int_{\mathcal{O}} n_{\Gamma_2}(\theta, p) d\theta dp,$$

in quanto  $n_{\Gamma}(\theta, p) = n_{\Gamma_1}(\theta, p) + n_{\Gamma_2}(\theta, p)$  per ogni  $(\theta, p) \in \mathcal{O}$ .

Poiché le poligonali non sono altro che la giunzione di un numero finito di segmenti, quanto appena visto mostra che è sufficiente provare la formula nel caso in cui la curva in questione sia un segmento.

Sia dunque  $\Gamma$  un segmento. Indicando con  $\{\mathcal{O} \cap \Gamma \neq \emptyset\}$  la regione che parametrizza l'insieme delle rette di  $\mathcal{O}$  che intersecano il segmento  $\Gamma$ , la formula da dimostrare può essere riscritta come

$$\ell(\Gamma) = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{O} \cap \Gamma \neq \emptyset} n_{\Gamma}(\theta, p) d\theta dp$$

Tuttavia, per ogni retta  $(\theta, p) \in \{\mathcal{O} \cap \Gamma \neq \emptyset\}$ , si possono avere solo due casi:

1. la retta interseca il segmento in un solo punto, cioè  $n_{\Gamma}(\theta, p) = 1$ ;
2. la retta contiene il segmento e dunque  $n_{\Gamma}(\theta, p) = +\infty$ .

Le rette del secondo tipo, però, sono solamente due: avendo esse misura nulla in  $\mathcal{O}$ , anche il loro contributo all'integrale è nullo.

Dunque, dato che per tutte le altre rette in questione l'integrando  $n_{\Gamma}(\theta, p)$  vale 1, riscriviamo la formula da provare come:

$$\ell(\Gamma) = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{O} \cap \Gamma \neq \emptyset} 1 d\theta dp = \frac{1}{4} \text{Area}(\{\mathcal{O} \cap \Gamma \neq \emptyset\})$$

Torna allora molto utile il risultato che abbiamo prima esaminato:

fissato un segmento, l'area dell'insieme delle rette che lo intersecano è uguale all'area dell'insieme delle rette che intersecano un qualunque trasformato del segmento, attraverso una roto-traslazione.

Se dunque  $L$  è la lunghezza euclidea del segmento in questione, a meno di una trasformazione euclidea, possiamo supporre che sia

$$\Gamma = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq L\}$$

Quali sono tutte le rette che intersecano un tale  $\Gamma$ ?

Possiamo intanto limitarci a considerare quelle che hanno direzione  $\theta \in [0, \pi]$ , osservando che lo stesso contributo è dato dalle rette con  $\theta \in [\pi, 2\pi]$  (che sono esattamente le stesse, semplicemente con direzione opposta).

Fissata inoltre una certa direzione  $0 \leq \theta \leq \pi$ , le rette con quella direzione che intersecano  $\Gamma$  sono tutte e sole quelle con distanza dall'origine positiva e compresa tra 0 ed  $L \cdot \sin \theta$ , come si può osservare in Figura 5.3.

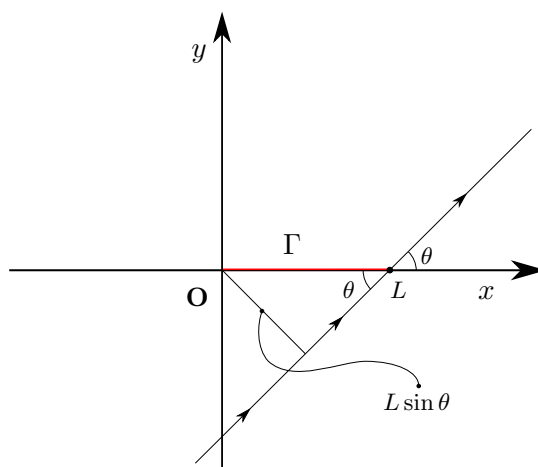


Figura 5.3

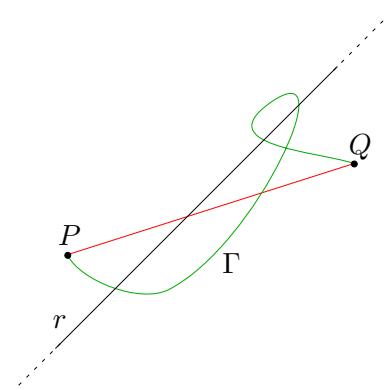
Avremo perciò

$$\begin{aligned} \text{Area} (\{\mathcal{O} \cap \Gamma \neq \emptyset\}) &= 2 \int_0^\pi \int_0^{L \sin \theta} dp \, d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi L \sin \theta \, d\theta = 4L, \end{aligned}$$

che è esattamente ciò che volevamo provare. □

*Osservazione 5.2.2.* La formula di Crofton ci fornisce una prova indiretta del fatto che la metrica euclidea sia proiettiva.

Fissiamo infatti due punti  $P$  e  $Q$  in  $\mathbb{R}^2$ . Se  $\Gamma$  è una qualunque curva di estremi  $P$  e  $Q$ , allora ogni retta  $r$  che interseca il segmento con questi due estremi, interseca necessariamente anche la curva  $\Gamma$ , in almeno un punto.

Figura 5.4: La retta  $r$  interseca 3 volte la curva  $\Gamma$

Applicando la formula di Crofton sia alla curva  $\Gamma$  che al segmento di estremi  $P$  e  $Q$ , otteniamo immediatamente che la lunghezza del segmento è minore o uguale a quella della curva  $\Gamma$ .

*Osservazione 5.2.3.* Consideriamo ora il piano  $\mathbb{R}^2$ , privo di ogni struttura metrica. Grazie alla formula di Crofton (che ricordiamo, però, ci fornisce la lunghezza euclidea di una curva), possiamo definire una distanza sul piano, ponendo

$$d(P, Q) = \inf\{ \ell(\Gamma) \mid \Gamma \in \Omega_{P,Q} \},$$

dove  $\Omega_{P,Q}$  è l'insieme delle curve con estremi  $P$  e  $Q$  e

$$\ell(\Gamma) = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{O}} n_{\Gamma}(\theta, p) d\theta dp.$$

Quale metrica otteniamo?

Dalla precedente osservazione, sappiamo che l'estremo inferiore in questione è addirittura un minimo, che è raggiunto nel caso in cui  $\Gamma$  sia il segmento di estremi  $P$  e  $Q$ .

Tuttavia, la lunghezza euclidea di un segmento coincide con la distanza euclidea dei suoi estremi: avremo dunque che la funzione  $d(\cdot, \cdot)$  così ottenuta è proprio la funzione *distanza euclidea* sul piano.

### 5.3 Una nuova costruzione di distanze proiettive

Nell'osservazione 5.2.2 abbiamo visto come sia possibile utilizzare la formula di Crofton per avere una prova della proiettività della distanza euclidea.

Il fatto che l'argomento usato non dipenda in alcun modo dalla particolare forma d'area scelta su  $\mathcal{O}$ , conduce naturalmente all'idea di sostituire la misura  $d\theta dp$  con altre misure.

Perveniamo così alla seguente definizione.

**Definizione 5.3.1.** Sia  $\mu$  una misura finita su  $\mathcal{O}$ . Definiamo allora la seguente funzione  $d_{\mu} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$d_{\mu}(x, y) = \frac{1}{4} \mu(\mathcal{R}_{x,y}),$$

dove  $\mathcal{R}_{x,y}$  parametrizza l'insieme delle rette orientate di  $\mathcal{O}$  che intersecano il segmento di estremi  $x$  e  $y$ .

Quello che adesso vogliamo verificare è che, sotto opportune ipotesi sulla misura  $\mu$ , la funzione  $d_{\mu}$  ottenuta sia effettivamente una distanza proiettiva sul piano. Cominciamo intanto con l'esaminare la seguente proposizione.

**Proposizione 5.3.2.** *Sia  $\mu$  una misura finita su  $\mathcal{O}$ , che soddisfa le seguenti due condizioni:*

1.  $\mu(A) > 0$  per ogni aperto  $A$  di  $\mathcal{O}$  (identificando  $\mathcal{O}$  col cilindro, si intende che  $A$  è un aperto euclideo del cilindro);
2.  $\mu(\Gamma) = 0$  per ogni sottoinsieme  $\Gamma$  di  $\mathcal{O}$  che sia il sostegno di una curva  $C^\infty$  in  $\mathcal{O}$  (o, se si preferisce, in  $\mathcal{C}$ ).

Allora l'applicazione  $d_\mu$  sopra definita,

$$d_\mu(x, y) = \frac{1}{4} \mu(\mathcal{R}_{x,y}),$$

è una distanza su  $\mathbb{R}^2$ .

*Dimostrazione.* Si tratta verificare le tre proprietà di una distanza.

- **SIMMETRIA:**

Questo punto è davvero banale: segue dal fatto che, per stessa definizione di  $\mathcal{R}_{x,y}$ , si ha

$$\mathcal{R}_{x,y} = \mathcal{R}_{y,x}.$$

- **POSITIVITA':**

Essendo  $\mu$  positiva, si ha sempre  $d_\mu(x, y) \geq 0$  per ogni coppia di punti  $x$  e  $y$  del piano. Inoltre:

1. se  $x \neq y$ , allora l'insieme  $\mathcal{R}_{x,y}$  è evidentemente un aperto di  $\mathcal{O}$  (si vede facilmente che contiene un rettangolo) e dunque, per l'ipotesi 1,  $d(x, y) > 0$ ;
2. se invece  $x = y$ , allora  $\mathcal{R}_{x,y}$  è semplicemente l'insieme di rette di  $\mathcal{O}$  che passa per il punto  $x$  fissato. E esso, però, è l'unione di due curve  $C^\infty$ , simmetriche in  $p$ .

Infatti, fissato il punto  $x$ , per ogni valore  $\theta \in S^1$  avremo due soli valori di  $p$ , opposti (che chiamiamo  $p_0$  e  $-p_0$ ), tali che la retta  $(\theta, p)$  passi per  $x$ . La dipendenza di  $p$  da  $\theta$  è evidentemente  $C^\infty$ .

Ciò mostra appunto che l'insieme  $\mathcal{R}_{x,y}$  è l'unione di due curve  $C^\infty$  in  $\mathcal{O}$  ed ha perciò, dall'ipotesi 2, misura nulla secondo  $\mu$ .

- **DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE:**

Siano  $x$ ,  $y$  e  $z$  tre punti nel piano. Essi identificano un triangolo: è evidente che, se una retta interseca il segmento  $xz$ , allora intersecherà anche uno dei restanti due lati del triangolo,  $xy$  o  $yz$ . In altre parole

$$\mathcal{R}_{x,z} \subseteq \mathcal{R}_{x,y} \cup \mathcal{R}_{y,z}.$$

Dall'additività della misura  $\mu$ , possiamo concludere che

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

□

*Nota.* Un esempio di misure  $\mu$  che soddisfano le condizioni 1 e 2 della proposizione appena esaminata, sono le misure assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue su  $\mathcal{C}$ , ovvero le misure della forma  $f(\theta, p) d\theta dp$ , con  $f$  però strettamente positiva.

Per esse, dunque, abbiamo subito che  $d_\mu$  è una funzione distanza sul piano.

E' naturale, a questo punto, chiedersi se per le distanze così costruite valga un analogo di quella che è la formula di Crofton per la distanza euclidea.

La seguente proposizione risponde affermativamente a questa domanda.

**Proposizione 5.3.3.** *Sia  $\mu$  una misura su  $\mathcal{O}$  come nella proposizione 5.3.2 (oppure, per semplicità,  $\mu \ll \mathcal{L}$ ) e sia  $d_\mu$  la distanza ad essa associata. Allora, nello spazio metrico  $(\mathbb{R}^2, d_f)$ , la lunghezza di una curva  $\Gamma$  vale*

$$\ell(\Gamma) = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{O}} n_\Gamma(\theta, p) d\mu(\theta, p). \quad (5.2)$$

*Dimostrazione.* La prima parte della dimostrazione è identica a quella della formula di Crofton: grazie al fatto che la misura delle rette passante per un solo punto è nulla, ci riconduciamo facilmente al caso in cui  $\Gamma$  sia un segmento.

A questo punto, ciò che dobbiamo mostrare è che

$$\ell(\Gamma) = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{O} \cap \Gamma \neq \emptyset} d\mu(\theta, p).$$

In altri termini, se gli estremi di  $\Gamma$  sono  $x$  e  $y$ , la formula da verificare è

$$\ell(\Gamma) = d_f(x, y).$$

Questa formula, però, è conseguenza della seguente proprietà:

per ogni tripla di punti allineati  $P, Q$  ed  $R$  (con  $Q$  tra  $P$  ed  $R$ ), vale

$$d_\mu(P, R) = d_\mu(P, Q) + d_\mu(Q, R).$$

Essa segue semplicemente dalla definizione di  $d_\mu$ , osservando che l'insieme delle rette che intersecano il segmento  $PR$  è l'unione *disgiunta* (a meno di un insieme di misura nulla secondo  $\mu$ , che è quello delle rette passanti per  $Q$ ) dell'insieme di quelle che intersecano  $PQ$  e dell'insieme di quelle che intersecano  $QR$ .

A questo punto, segue abbastanza facilmente (per induzione sul numero di vertici) che la lunghezza di ogni poligonale di estremi  $x$  e  $y$ , con vertici sul segmento  $\Gamma$ , sia  $d_f(x, y)$ . Dunque, passando come da definizione all'estremo superiore sulla lunghezza di tali poligonali, ciò che otteniamo è appunto

$$\ell(\Gamma) = d_f(x, y).$$

□

I risultati fin qui visti ci permettono di concludere il capitolo, ed anche l'intero lavoro, col seguente risultato.

**Teorema 5.3.4.** *Sia  $\mu$  una misura sullo spazio delle rette orientate, assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue su  $\mathcal{O}$  e strettamente positiva sugli aperti. Allora la funzione distanza*

$$d_\mu(x, y) = \frac{1}{4} \mu(\mathcal{R}_{x,y})$$

*è una distanza proiettiva sul piano.*

*Dimostrazione.* Tutta la dimostrazione si fonda sulla formula (5.2). Fissati due punti  $P$  e  $Q$  del piano, sia  $\Gamma$  una qualunque curva che li congiunge.

Il fatto che la lunghezza di  $\Gamma$  sia maggiore o uguale a quella del segmento di estremi  $P$  e  $Q$  segue dal fatto che ogni retta che interseca in un solo punto il segmento, interseca necessariamente anche  $\Gamma$  in almeno un punto.

Le rette che invece contengono il segmento sono solamente due, ma hanno misura nulla rispetto a  $\mu$ .

Dalla formula (5.2), deduciamo

$$\ell(\Gamma) \geq \ell(\text{segmento}).$$

□

*Osservazione 5.3.5.* Possiamo chiederci quali di queste distanze inducano sul piano una metrica che è in realtà una metrica Finsler. La risposta è molto semplice: se consideriamo misure  $\mu$  della forma

$$f(\theta, p) d\theta dp$$

con  $f$  positiva, di classe  $C^\infty$  e tale che  $f(\theta + \pi, -p) = f(\theta, p)$  per ogni  $(\theta, p) \in \mathcal{O}$ , si può dimostrare che la formula

$$\ell(\Gamma) = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{O}} n_\Gamma(\theta, p) f(\theta, p) d\theta dp$$

definisce una metrica Finsler sul piano, la cui funzione Lagrangiana  $L$  è un'espressione a noi già nota dal precedente capitolo:

$$L(x_1, x_2, v_1, v_2) = \int_0^{2\pi} |v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta| f(\theta, x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) d\theta. \quad (5.3)$$

Quest'ultima osservazione mette in perfetta corrispondenza biunivoca le metriche Finsler proiettive di cui abbiamo parlato nel capitolo scorso con le distanze sul piano indotte da misure assolutamente continue rispetto a Lebesgue, che abbiano le proprietà appena viste.

In altre parole, la distanza associata ad una metrica Finsler  $L_f$  come in (5.3) induce una distanza sul piano che è esattamente la distanza indotta dalla misura  $f d\theta dp$ , come spiegato in questo capitolo.



# Bibliografia

- [1] J. C. Álvarez Paiva. Hilbert's fourth problem in two dimensions I. In *MASS Selecta: Teaching and Learning Advanced Undergraduate Mathematics*, pages 165–184, Providence, RI, 2003. Amer. Math. Society.
- [2] G. Buttazzo, M. Giaquinta, and S. Hildebrandt. *One-dimensional Variational Problems: an introduction*. Oxford Lecture Ser. Math. Appl. 15. Oxford Science Publications, 1998.
- [3] G. Hamel. *Über die Geometrieen, in denen die geraden di Kürzesten sind*, volume 57. Math. Ann., 1903.
- [4] P. Petersen. *Riemannian Geometry*, volume 171 of *GTM*. Springer, 2nd edition, 2006.
- [5] S. Tabachnikov. *Geometry and billiard*, volume 30 of *Student Mathematical Library*. Amer. Math. Society, 2nd edition, 2006.