corso: **Elementi di Analisi Matematica**

corso di laurea: **Matematica**

anno accademico: **2004/05**

lezioni: **Giovanni Alberti**

esercitazioni: **Ariela Briani**

Lo scopo della prima parte di questo corso è di far familiarizzare lo studente con l'uso di derivate ed integrali, e particolare attenzione è rivolta alle applicazioni di questi strumenti: studi qualitativi di funzioni, calcolo di aree e volumi, risoluzione di alcune semplici classi di equazioni differenziali. L'impianto teorico necessario verrà invece sviluppato nella seconda parte del corso.

Programma del corso. Sono in corsivo gli argomenti non essenziali.

Prima parte (Calcolo)

1. Terminologia di base per le funzioni: dominio, codominio, grafico, surgettività, iniettività, invertibilità. Funzioni monotòne, pari, dispari e periodiche. Funzione inversa.
2. Grafici delle funzioni elementari (potenze, esponenziali, logaritmo, funzioni trigonometriche). Visualizzazione grafica di alcune trasformazioni.
3. Definizione di derivata e sua interpretazione geometrica. Calcolo delle derivate. Relazione tra segno della derivata e monotonia. Relazione tra segno della derivata seconda e convessità; studio qualitativo del grafico di una funzione.
4. L'integrale definito inteso come area. Calcolo degli integrali per approssimazione. Teorema fondamentale del calcolo e relazione tra integrale definito e primitiva (integrale indefinito). Calcolo delle primitive.
5. L'area di una figura piana come integrale delle lunghezze delle sezioni unidimensionali; il volume di una figura solida come integrale delle aree delle sezioni bidimensionali; lunghezza del grafico di una funzione.
6. Definizione di limite. Operazioni elementari con i limiti. Notazione di Landau ("o" piccolo); parte principale e ordine di un infinito e di un infinitesimo. Infiniti ed infinitesimi asintoticamente equivalenti; principio di sostituzione degli infinitesimi.
7. Sviluppo di Taylor, applicazioni al calcolo delle parti principali e dei limiti di forme indeterminate. Regole di de L'Hôpital. Confronto di esponenziali, potenze e logaritmi (all'infinito ed in zero).
8. Equazioni differenziali del primo ordine: problema di Cauchy ed enunciato del teorema di esistenza ed unicità locale, equazioni a variabili separabili, equazioni lineari del primo ordine (formula risolutiva generale).
9. Equazioni differenziali del secondo ordine: problema di Cauchy ed enunciato del teorema di esistenza ed unicità locale, equazioni lineari (omogenea e non), soluzione delle equazioni omogenee a coefficienti costanti, ricerca di una soluzione particolare in alcuni casi speciali.

Seconda parte (Analisi)

10. Elementi di calcolo combinatorio: permutazioni, combinazioni, disposizioni, coefficienti binomiali, binomio di Newton.
11. Numeri complessi: interpretazione geometrica, esponenziale complesso, calcolo di potenze e radici di un numero complesso.
12. Numeri reali. Definizione assiomatica; reali estesi; definizione di massimo e minimo, e di estremo inferiore e superiore; esistenza di estremo inferiore e superiore.
13. Definizione di limite di una successione e sue proprietà; convergenza delle successioni monotone e delle successioni di Cauchy; teorema di Bolzano-Weierstrass. *Successioni definite per ricorrenza.*

14. Teoria degli insiemi: prodotto infinito, insieme delle parti, insieme potenza. Insiemi numerabili e non: gli interi, i razionali e gli algebrici sono numerabili, i reali sono più che numerabili. *Cardinalità, teorema di Cantor-Bernstein.*
15. Definizione di limite di una funzione e sue proprietà; funzioni continue; teorema di esistenza dei valori intermedi; Teorema di esistenza di massimo e minimo (Weierstrass).
16. Definizione di derivata. Derivabilità e continuità. Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy. Dimostrazione delle regole di de L'Hôpital.
17. Integrale secondo Riemann di una funzione limitata. Integrabilità delle funzioni continue. Teorema fondamentale del calcolo integrale.
18. Formula di Taylor con resto integrale, di Lagrange e di Peano.
19. Integrali impropri. Criteri di convergenza per funzioni positive (confronto e confronto asintotico). La convergenza assoluta implica la convergenza.
20. Serie numeriche: alcuni esempi fondamentali (serie geometrica e serie armonica di esponente 1 e 2. Criteri di convergenza per serie a termini positivi: del confronto (asintotico), del rapporto, della radice, dell'integrale.
21. Serie a termini reali: convergenza e convergenza assoluta. Criterio di Leibniz per le serie a segni alterni. *Riordinabilità delle serie.*
22. Serie di potenze: raggio di convergenza, derivabilità. *Serie di Taylor: criterio di convergenza. Costruzione rigorosa dell'esponenziale e delle funzioni trigonometriche tramite la serie di Taylor.*
23. Equazioni differenziali lineari di ordine k: omogenee a coefficienti costanti, non omogenee, soluzioni particolari, metodo della riduzione dell'ordine e metodo della variazione delle costanti.

Bibliografia

La prima parte del corso (calcolo) non segue un testo preciso, e qualunque libro che spieghi in modo essenziale i concetti base di derivazione ed integrazione va benissimo; sta allo studente individuare quello che gli è più congeniale. Analogo discorso vale per la seconda parte del corso, quella più teorica, anche se per questa c'è un'ampia scelta di testi più o meno complicati, ed ogni studente è libero di adottare quello che preferisce (o che ha già). Un buon testo contenente la parte essenziale del programma è

E. Acerbi, G. Buttazzo: *Analisi matematica ABC, vol. 1.* Pitagora, Bologna 2003.

Per gli argomenti non contenuti in questo testo, verranno date referenze bibliografiche di volta in volta, oppure degli appunti. Tra i testi più completi segnalo invece i seguenti:

E. Acerbi, G. Buttazzo: *Primo corso di analisi matematica.* Pitagora, Bologna 1997.

A. Faedo, L. Modica: *Analisi I. Lezioni.* Edizioni Unicopli, Milano 1992.

E. Giusti: *Analisi Matematica 1* (seconda ed.). Boringhieri, Torino 1988.

G. Prodi: *Analisi Matematica.* Boringhieri, Torino 1970

W. Rudin: *Principi di Analisi Matematica*, McGraw-Hill Italia, Milano 1991.

Gli ultimi due libri indicati, anche se belli, sono decisamente difficili.

Appelli ed esami

L'esame scritto si consiste di una prima parte con otto domande o semplici problemi a cui rispondere in un'ora senza motivare le risposte, ed una seconda parte con tre o più problemi a cui dare una risposta articolata e motivata in dettaglio (due ore di tempo o più). È necessaria la sufficienza in entrambe le parti. Durante l'anno verranno svolti tre compitini (prove in itinere) che sostituiscono lo scritto. In tutto l'anno accademico sono previsti cinque appelli.